Aufgabe 30: Thema: Positiv definite Matrizen
Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Welche Aussagen sind richtig?

a) Gilt $\det A > 0$, dann ist A positiv definit. ja ☐ nein ☐

b) Ist A positiv definit, dann gilt $\det A > 0$. ja ☐ nein ☐

c) Hat das homogene System $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung, dann ist A nicht positiv definit. ja ☐ nein ☐

d) Ist A positiv definit, dann ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: Die Antworten lauten:

a) Nein! Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Ja! Da die Matrix A positiv definit ist, sind alle ihre Eigenwerte größer Null. Da die Determinante von A sich schreiben läßt als das Produkt der Eigenwerte von A ist auch die Determinante größer Null.

c) Ja! Wenn das homogene System $Ax = 0$ eine nicht triviale Lösung hat, sind die Spalten von A linear abhängig. Daraus folgt, dass die Determinante von A gleich Null ist und somit muss mindestens ein Eigenwert von A gleich Null sein, so dass die Matrix nicht positiv definit sein kann.

d) Ja! Wenn die Matrix A positiv definit ist, gilt $\det A \neq 0$. Daraus folgt A ist invertierbar und somit ist das Gleichungssystem eindeutlich lösbar.

Aufgabe 31: Berechnen Sie Länge und Richtung der Hauptachsen des durch

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4yz = 1\right\}$$

gegebenen Ellipsoids.

LÖSUNG:

$$x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4yz = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\,, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und Eigenvektoren:

$$0 = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)\cdot\big((5-\lambda)(2-\lambda) - 4\big) = (1-\lambda)\cdot\big(\lambda^2 - 7\lambda + 6\big) = (1-\lambda)^2(6-\lambda)$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 6$$

Die Halbachsenlängen sind gegeben durch $1/\sqrt{\lambda_i}$, d.h. $a = 1$, $b = 1$ und $c = 1/\sqrt{6}$.

Normierte Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2} = 1$ bzw. die Achsen der Länge a und b:

$$\ker(A - 1\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

Normierter Eigenvektor zu $\lambda_3 = 6$ bzw. die Achse der Länge c::

$$\ker(A - 6\mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Aufgabe 32: Bestimmen Sie zur Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $\mathbf{P}$ so, dass $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ eine Diagonalmatrix ist.
Tipp: Probieren Sie die Teiler des konstanten Gliedes um die erste Nullstelle des charakteristischen Polynoms zu bestimmen.

LÖSUNG: (I) **Bestimmung der Eigenwerte:**

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 54 - 54 - 18(-5-\lambda) + 18(1-\lambda) + 9(4-\lambda) \\ &= (-5 + 4\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) - 108 + 90 + 18\lambda + 18 - 18\lambda + 36 - 9\lambda \\ &= -20 + 16\lambda + 4\lambda^2 + 5\lambda - 4\lambda^2 - \lambda^3 + 36 - 9\lambda \\ &= 16 + 12\lambda - \lambda^3 \end{aligned}$$

Als Nullstelle des Charakteristischen Polynoms raten wir $\lambda = 4$ und testen

$$P(4) = -64 + 48 + 16 = 0.$$

Mit Hilfe der Polynomdivision oder des Horner-Schemas erhält man daraus

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = (\lambda - 4)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = (\lambda - 4)(-1)(\lambda + 2)^2.$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind also

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 4.$$

(II) **Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:**
Für $\lambda_1 = -2$ erhält man:

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+2\mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0}\\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow x_2 = x_1 + x_3. &\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ bzw. $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = -2 = \lambda_2$.
Man sieht leicht ein (oder rechnet dies schnell nach), dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linear unabhängig sind.
Entsprechend gilt für $\lambda_3 = 4$:

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3\\ 3 & -9 & 3\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0}\\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3\\ 3 & -9 & 3\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ und } x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.&\\ \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ und } x_3 = 2x_2.&\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 4$.
Wir behaupten, dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir

$$\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2 + \nu\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

bzw. äquivalent dazu

$$\begin{aligned}\lambda + \nu &= 0\\ \lambda + \mu + \nu &= 0\\ \mu + 2\nu &= 0.\end{aligned}$$

Aus erster und zweiter Zeile folgt $\mu = 0$, mit der dritten Zeile folgt $\nu = 0$ und damit aus der ersten Zeile $\lambda = 0$. Dies war zu zeigen.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

ist also invertierbar, da die Spalten linear unabhängig sind.

Damit ist $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, wir berechnen also noch $\mathbf{P}^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline
1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}$$

und erhalten:

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich rechnen wir nach:

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 33: In dieser Aufgabe diskutieren wir ein Beispiel, bei dem die Diagonalisierung von Matrizen es uns erlaubt, eine explizite Formel anzugeben für die Berechnung von Gliedern einer Zahlenfolge, die eigentlich durch eine iterative Vorschrift beschrieben werden:

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = 1,$$
$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dies führt auf die Zahlenfolge: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$, die sogenannten Fibonacci-Folge.

Um nun eine explizite Formel für die x_n angeben zu können, stellen wir die Iterationsvorschrift als Matrixoperation dar:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{=:\, y_{n+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:\, y_n} \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} = Ay_n = A^n y_1 \qquad \text{mit } y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um nun A^n direkt berechnen zu können, diagonalisieren wir A. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist.
Tipp: Rechnen Sie im Folgenden so lange wie möglich mit der Variablen λ_i und nicht mit den Werten von λ_i.

c) Diagonalisieren Sie die Matrix A.
Tipp: Erinnern Sie sich daran, dass es für 2×2 Matrizen eine Formel zum Berechnen der inversen Matrix gibt.
Zur Kontrolle:

$$A = BDB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie A^n.

e) Geben Sie eine Formel für y_{n+1} und dadurch für x_n an.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} & \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_{1/2} &= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 1} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda_i \mathbb{1})\begin{pmatrix}\lambda_i\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1-\lambda_i & 1\\ 1 & -\lambda_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_i\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-\lambda_i^2+\lambda_i+1\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aus den vorherigen Aufgabenteil wissen wir $\lambda_i^2-\lambda_i-1=0$, so dass auch die erste Komponente des Vektors gleich Null und die Behauptung bewiesen ist.

c) Für die inverse Matrix einer 2×2 Matrix $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ gilt

$$
B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}
$$

$$
A=B\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B^{-1}
$$

mit $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ und $B^{-1}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\ -1 & \lambda_1\end{pmatrix}$

d)

$$
A^2=B\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B^{-1}B\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B^{-1}=B\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix}B^{-1}
$$

$$
\Rightarrow A^n=B\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}B^{-1}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\ -1 & \lambda_1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}\lambda_1^n & -\lambda_1^n\lambda_2\\ -\lambda_2^n & \lambda_1\lambda_2^n\end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1}\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^{n+1}\\ \lambda_1^n-\lambda_2^n & -\lambda_1^n\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^n\end{pmatrix}}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad y_{n+1}=A^n y_1 &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1}\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^{n+1}\\ \lambda_1^n-\lambda_2^n & -\lambda_1^n\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}\\ \lambda_1^n-\lambda_2^n\end{pmatrix}\\
\Rightarrow\quad x_n &= \frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{2^n}\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

Probe: $\quad x_1=\dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=1,\quad x_2=\dfrac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{2^2\sqrt{5}}=1.$