Aufgabe 34: Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

$$A^T A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 27 \\ 27 & 45 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte der Matrix $A^T A$:

$$P(\lambda) = \det\left(A^T A - \lambda \mathbb{1}\right) = \det \begin{pmatrix} 45-\lambda & 27 \\ 27 & 45-\lambda \end{pmatrix} = (45-\lambda)^2 - 27^2$$

$$P(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 45 \pm 27 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 18 \text{ oder } \lambda = 72$$

$$\Rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & \sqrt{72} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenvektoren der Matrix $A^T A$:

$$\left(A^T A - 18\mathbb{1}\right) x = \begin{pmatrix} 27 & 27 \\ 27 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 27(x_1 + x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor der Matrix $A^T A$ zum Eigenwert 18.

$$\left(A^T A - 72\mathbb{1}\right) x = \begin{pmatrix} -27 & 27 \\ 27 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -27x_1 + 27x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor der Matrix $A^T A$ zum Eigenwert 72.

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = AV = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{36}} & -\frac{8}{\sqrt{144}} & \vdots \\ -\frac{4}{\sqrt{36}} & \frac{4}{\sqrt{144}} & ? \\ -\frac{4}{\sqrt{36}} & -\frac{8}{\sqrt{144}} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \vdots \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & ? \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \vdots \end{pmatrix}$$

Die letzte Spalte der Matrix U berechnen wir, indem wir einen Vektor suchen, der senkrecht auf den ersten beiden Spalten von W steht und zudem Norm eins hat.

$$
\begin{array}{lrcll}
 & \frac{1}{3}u_1 - \frac{2}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 & = & 0 & \\
 & -\frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 & = & 0 & \\
\hline
\Leftrightarrow & u_1 - 2u_2 - 2u_3 & = & 0 & \\
 & -2u_1 + u_2 - 2u_3 & = & 0 & \\
\hline
\Leftrightarrow & u_1 - 2u_2 - 2u_3 & = & 0 & \\
 & -3u_2 - 6u_3 & = & 0 & 2I + II \\
\hline
\Leftrightarrow & u_1 & = & 2u_2 - 2u_3 & \\
 & u_2 & = & -2u_3 & \\
\hline
\Leftrightarrow & u_1 & = & 2(-2u_3) + 2u_3 = -2u_3 & \\
 & u_2 & = & -2u_3 &
\end{array}
$$

Wir wählen z.B. $u_3 = 1$ und berechnen dann $u_1 = u_2 = -2$, anschließend normieren wir den Vektor

$$
\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} / \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad A = UDV^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & \sqrt{72} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 35: Thema: Singulärwertzerlegung und assoziierte Unterräume

Sei A eine $m \times n$ Matrix mit Rang r und $A = UDV^T$ ihre Singulärwertzerlegung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Der Spaltenraum von A wird von den ersten r Spalten von U aufgespannt. ja ☐ nein ☐

b) Jeder Vektor y im Kern von A^T steht senkrecht auf jeder Spalte von A. ja ☐ nein ☐

c) Der Kern von A^T wird von den letzten $n - r$ Spalten von U aufgespannt. ja ☐ nein ☐

d) Der Spaltenraum von A^T wird von den ersten r Spalten von V aufgespannt. ja ☐ nein ☐

e) Der Kern von A wird von den letzten $m - r$ Spalten von V aufgespannt. ja ☐ nein ☐

Lösung: Die Antworten lauten:

a) Ja!

b) Ja!

c) Nein! Der Kern von A^T wird von den letzten $m - r$ Spalten von U aufgespannt.

d) Ja!

e) Nein! Der Kern von A wird von den letzten $n - r$ Spalten von V aufgespannt.

Aufgabe 36: Thema: Zu einer Matrix assoziierte Unterräume
Sei A eine $m \times n$ Matrix mit Rang r. Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Es gilt $\dim \mathrm{Bild} A = r$ und $\dim \mathrm{Ker} A = m - r$.
ja ☐ nein ☐

b) Es gilt $\dim \mathrm{Bild} A^T = r$ und $\dim \mathrm{Ker} A^T = n - r$.
ja ☐ nein ☐

c) Es gilt $\dim \mathrm{Bild} A^T = r$ und $\dim \mathrm{Ker} A^T = m - r$.
ja ☐ nein ☐

d) Es gilt $\mathrm{Bild} A = (\mathrm{Ker} A^T)^\perp$ und $\mathrm{Bild} A^T = (\mathrm{Ker} A)^\perp$.
ja ☐ nein ☐

e) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn aus $A^T y = 0$ stets $b^T y = 0$ folgt. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: Die Antworten lauten:

a) Nein! $\dim \mathrm{Ker} A = n - r$

b) Nein! $\dim \mathrm{Ker} A^T = m - r$

c) Ja!

d) Ja!

e) Ja!