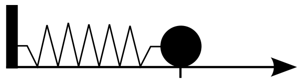
Aufgabe 37: Betrachten Sie den in der Skizze dargestellten Fall.



Bewegen wir die Kugel der Masse m nach links oder rechts und lassen sie los, so versetzen wir das System in Schwingungen. Die Reibungskräfte vernachlässigen wir. Bei Auslenkung der Kugel nach rechts oder links übt die Feder die (Rückstell-) Kraft $F = -Dx$ auf die Kugel aus, die mittels $F = m\ddot{x}$ zu einer Beschleunigung der Kugel führt. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x.$$

a) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Anfangswerte $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$, indem Sie den Ansatz $x(t) = a\,\cos(bt + c)$ wählen und die Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ berechnen.

b) Schreiben Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung um in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

c) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie des Systems, die sich zusammensetzt aus der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ der Kugel und der (in der Dehnung der Feder gespeicherten) elastischen Energie $E_{\text{elast}} = \frac{1}{2}Dx^2$ konstant ist.

LÖSUNG:

a) Für den Ansatz $x(t) = a\,\cos(bt + c)$ berechnet man

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ab\,\sin(bt + c) \\ \ddot{x}(t) &= -ab^2\,\cos(bt + c) \end{aligned}$$

Damit die DGL $\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x(t)$ für alle $t \geq 0$ erfüllt ist, muss $-b^2 = -\frac{D}{m}$, also $b = \sqrt{\frac{D}{m}}$ gelten. Um den Anfangswert $0 = \dot{x}(0) = -ab\,\sin(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot 0 + c)$, also $\sin(c) = 0$ zu erfüllen, muss c ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein, wähle also z.B. $c = 0$. Die zweite Anfangsbedingung $1 = x(0) = a\,\cos(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot 0 + 0) = a$ liefert den Wert für a.

b) $z_0 := x$, $z_1 := \dot{x}$

$$\dot{z} = g(t, z) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{z}_0 & = & z_1 \\ \dot{z}_1 & = & -\frac{D}{m}z_0 \end{pmatrix}$$

c) Die Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{elast}}$ ist konstant, wenn die Ableitung gleich Null ist.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \\ \Rightarrow \dot{E} &= m\dot{x}\ddot{x} + Dx\dot{x} \\ &= m\dot{x}\left(-\frac{D}{m}x\right) + Dx\dot{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 38: a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die die Bewegung eines Satelliten um die Erde ohne Berücksichtigung des Mondes beschreibt. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass der Erdmittelpunkt im Ursprung liegt.

b) Eine geostationäre Umlaufbahn ist (näherungsweise) eine Kreisbahn in Äquatorebene. Geben Sie eine Parametrisierung für eine beliebige Kreisbahn in Äquatorebene um den Ursprung an, die Radius r hat und in der Zeit T einmal die Erde umkreist hat. Den Startpunkt können Sie z.B. als $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen.

c) Zeigen Sie, dass diese Kurve für geeignete r, T die Differentialgleichung löst. Welche Bedingung ergibt sich dabei für r und T?

d) Ein geostationärer Satellit umkreist die Erde innerhalb eines siderischen Tages (23 h 56 m 4 s). Die Erdmasse beträgt $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg. Berechnen Sie den Radius der geostationären Umlaufbahn.

e) Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Satelliten in geostationärer Umlaufbahn?

Lösung:

a) Im Kapitel über gewöhnliche Differentialgleichungen wurde der Fall eines Erdsatelliten, dessen Bahn durch die Gravitationskräfte der Erde und des Mondes bestimmt wird, behandelt. In diesem Fall ergab sich folgende Differentialgleichung zur Beschreibung der Bahn des Satelliten:

$$\ddot{x}_s = G\left(\frac{M_e}{\|x_e - x_s\|^3}(x_e - x_s) + \frac{M_m}{\|x_m - x_s\|^3}(x_m - x_s)\right)$$

Da wir in dieser Aufgabe den Einfluss des Mondes ignorieren und das Koordinatensystem so legen, dass der Erdmittelpunkt im Ursprung liegt, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\ddot{x}_s = -G\frac{M_e}{\|x_s\|^3}x_s$$

Da wir nun nur noch die Koordinaten des Satelliten haben, können wir das x_s durch ein einfaches x ersetzen.

$$\ddot{x} = -G\frac{M_e}{\|x\|^3}x$$

b) Allgemein ist die Parametrisierung einer Kreisbahn in der $x_1 - x_2$ Ebene mit Radius r, Mittelpunkt 0 und Startpunkt $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben durch

$$x(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha t) \\ r\sin(\alpha t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei α die Umlaufgeschwindigkeit bestimmt.
Nun soll zusätzlich gelten

$$x(0) = x(T) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} r\cos(0) \\ r\sin(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha T) \\ r\sin(\alpha T) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es muss also gelten $\alpha T = 2\pi$ und somit ergibt sich die Parametrisierung

$$x(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\frac{2\pi}{T}t) \\ r\sin(\frac{2\pi}{T}t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= r\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\frac{2\pi}{T} \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\frac{2\pi}{T} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2\pi}{T}r\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\ddot{x}(t) &= \frac{2\pi}{T}r\begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\frac{2\pi}{T} \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\frac{2\pi}{T} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{4\pi^2}{T^2}r\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{4\pi^2}{T^2}x(t)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$-\frac{4\pi^2}{T^2} = -\frac{GM_e}{r^3} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{GM_eT^2}{4\pi^2}$$

d)

$$T = 23 \cdot 60^2\,s + 56 \cdot 60\,s + 4\,s = 86164\,s$$

$$\begin{aligned}
r &= \left(\frac{6{,}672 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5,9736 \cdot 10^{24}\,kg \cdot (86164\,s)^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\approx 42162664\,m \\
&\approx 42163\,km
\end{aligned}$$

e)

$$\dot{x}(t) = \frac{2\pi r}{T}\left(\begin{array}{c} -\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\dot{x}(t)\| &= \frac{2\pi r}{T}\sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)} \\ &= \frac{2\pi r}{T} \\ &\approx \frac{2\pi \cdot 42163000\,m}{86164\,s} \\ &\approx 3075\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

Aufgabe 39: Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_1(t)+y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= y_1(t)+y_2(t) \end{aligned}$$

mit Anfangswerten $y_1(0) = y_2(0) = 1$ mit Hilfe von Diagonalisierung.

LÖSUNG: Das Differentialgleichungssystem läßt sich wie folgt umschreiben:

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = Ay(t)$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung eines solchen Differentialgleichungssystem gegeben ist durch

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\left(A(t-t_0)\right)y(t_0) \\ &= \exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Um $\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}t\right)$ zu berechnen, müssen wir die Matrix A diagonalisieren: Berechnung der Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$P(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ oder } 2$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert 2:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist also $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert 0:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad x_1 &= -x_2 \end{aligned}$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist also $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t) &= \exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{0t} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 40: Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} = y\,,$$

a) mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0\ ,\ \dot{y}(0) = 1$,

b) mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1\ ,\ \dot{y}(0) = 0$,

indem Sie die Differentialgleichung umschreiben in ein (zugehöriges) Differentialgleichungssystem erster Ordnung, auf welches Sie dann das Picard-Lindelöf'sche Iterationsverfahren (Diagonalisierung) anwenden.

LÖSUNG:
Um die Differentialgleichung zweiter Ordnung umzuschreiben in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung setzen wir

$z_0 := y,\ z_1 := \dot{y}\ \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{z}_0 = \dot{y} = z_1 \\ \dot{z}_1 = \ddot{y} = y = z_0 \end{array}$

Also ist

$$\dot{z} = \dot{\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}z$$

zu lösen! Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung durch

$$z(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} z_0$$

gegeben ist. In unserem Fall gilt $t_0 = 0$ und in (a) $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie in (ii) $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Dadurch ergeben sich die Lösungen

- $z(t) = e^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $z(t) = e^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wie sieht $e^{t\mathbf{A}}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aus?
Um diese Frage beantworten zu können, diagonalisieren wir die Matrix $\mathbf{A}$ und starten mit der Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{array}{rrcl} & \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{1}) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 - 1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & -1 \quad \text{oder} \quad 1 \end{array}$$

Anschließend berechnen wir die Eigenvektoren zu den Eigenwerten von $\mathbf{A}$:

$$\begin{array}{rrcl} & (\mathbf{A} + 1\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & x_1 & = & -x_2 \end{array}$$

Zum Eigenwert -1 ergibt sich also ein Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rrcl} & (\mathbf{A} - 1\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & x_1 & = & x_2 \end{array}$$

Zum Eigenwert 1 ergibt sich also ein Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Insgesamt erhalten wir

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Vorlesung wissen wir

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{t} & -e^{-t}+e^{t} \\ -e^{-t}+e^{t} & e^{-t}+e^{t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Alternativ kann man $e^{t\mathbf{A}}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \\
\mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{A} \\
\mathbf{A}^4 &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{I} \\
\mathbf{A}^5 &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{A}
\end{aligned}$$

Induktiv:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^0 &= \mathbf{I} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^4 = \ldots = \mathbf{A}^{2k} = \mathbf{A}^{2k+2} \\
\mathbf{A}^1 &= \mathbf{A} = \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^5 = \ldots = \mathbf{A}^{2k+1} \quad \text{für } k = 0,1,2,3,\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ e^{t\mathbf{A}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k = \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{2m}}{(2m)!}\right)\mathbf{I} + \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\mathbf{I} + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\mathbf{A} \\
&= \cosh t\mathbf{I} + \sinh t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir folgende Lösungen

- $z(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow y(t) = \sinh t$
- $z(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow y(t) = \cosh t$