Aufgabe 41: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -\frac{t}{y(t)}$$

mit Anfangswert $y(0) = 1$.

LÖSUNG: Diese Differentialgleichung lösen wir mit Separation der Variablen

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = -\frac{t}{y(t)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \int_{y(0)}^{y(t)} \tilde{y}\, d\tilde{y} = -\int_0^t s\, ds \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}y^2(t) - \frac{1}{2}y^2(0) = -\frac{1}{2}t^2 \\
\Leftrightarrow \quad & y^2(t) = 1 - t^2 \\
\Leftrightarrow \quad & y(t) = \pm\sqrt{1-t^2}
\end{aligned}$$

Da die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt sein muss, ist nur

$$y(t) = \sqrt{1-t^2}$$

eine Lösung.

Aufgabe 42: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t)}{t}$$

für $t > 1$ mit dem Anfangswert $y(1) = 1$.

LÖSUNG: Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung einer Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t)$$

mit Anfangswert $y_0 = y(t_0)$ gegeben ist durch

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\, ds\right) y_0.$$

In unseren Fall ist $a(t) = \frac{1}{t}$, so dass wir als Lösung für unsere Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
y(t) &= \exp\left(\int_1^t \frac{1}{s}\, ds\right) \cdot 1 \\
&= \exp\left(\ln t - \ln 1\right) \\
&= e^{\ln t} \\
&= t
\end{aligned}$$

erhalten.

Alternativ: Diese Aufgabe lässt sich auch durch Separation der Variablen lösen.

Aufgabe 43: Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 1 + y^2, \\ y(0) &= a, \end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

LÖSUNG: Wir lösen das Anfangswertproblem durch Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = 1 + y(t)^2$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow && \int_a^{y(t)} \frac{1}{1+\tilde{y}^2}\, d\tilde{y} = \int_0^t 1\, ds \\ &\Leftrightarrow && \arctan(y(t)) - \arctan(a) = t \\ &\Leftrightarrow && y(t) = \tan(t + \arctan(a)) \end{aligned}$$

Zusatzbemerkung: Für welche t ist diese Lösung nun definiert?
arctan ist als Umkehrfunktion von tan auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und bildet $\mathbb{R}$ auf das offene Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ab, denn tan ist auf diesem Intervall streng monoton wachsend daher umkehrbar.
Wenn nun

$$c_0 = \arctan(a) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ ,$$

dann ist $y(t) = \tan(t + c_0)$ definiert für

$$-c_0 - \frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} - c_0 \ .$$

Denn für $t \to \frac{\pi}{2} - c_0$ (von unten) bzw. $t \to -\frac{\pi}{2} - c_0$ (von oben) gilt:

$$\tan(t + c_0) \to \pm\infty$$

Aufgabe 44: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = -y \sin(t) + \sin(2t); \quad y(0) = 1.$$

LÖSUNG: 1) Wir lösen zunächst die homogene Differentialgleichung

$$\dot{y} = -y\ \sin(t)$$

durch Separation der Variablen, bzw. direkt (siehe Skript)

$$\Rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = -\sin(t) \quad \Rightarrow \int \frac{\dot{y}}{y}\, dy = -\int \sin(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \cos(t) + c \qquad \Rightarrow y(t) = c_h\, e^{\cos(t)} =: y_h(t)\ .$$

2) Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gewinnen wir durch die Methode der Variation der Konstanten. Dazu gehen wir aus von dem Ansatz:

$$y_s(t) := c(t)\, y_h(t)\ ,$$

berechnen die Ableitung von $y_s(t)$ und setzen dies in die Differentialgleichung ein:

$$\Rightarrow \dot{c}(t)\, y_h(t) + \dot{y_h}(t)\, c(t) = -c(t)\, y_h(t)\ \sin(t) + \sin(2\,t)\ .$$

Es gilt

$$\dot{y_h}(t)\, c(t) = -c(t)\, y_h(t)\ \sin(t)\ .$$

da y_h die homogene Differentialgleichung löst. Also folgt, daß

$$\Rightarrow \dot{c}(t)\, c_h e^{\cos(t)} = \sin(2\,t)\ .$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow c(t) &= \int_0^t \frac{1}{c_h} e^{-\cos(u)}\ \sin(2\,u)\, du \\
&= \frac{2}{c_h} \int_0^t e^{-\cos(u)}\ \cos(u)\ \sin(u)\, du \qquad \text{(Subst. } s = -\cos(u)\text{)} \\
&= -\frac{2}{c_h} \int_{-\cos(0)}^{-\cos(t)} e^s\, s\, ds \qquad \text{(Subst. gibt } ds = \sin(u)\, du\text{)} \\
&= -\frac{2}{c_h}\, e^s\, (s-1)\Big|_{-\cos(0)}^{-\cos(t)} = \frac{2}{c_h}\, e^{-\cos(t)}\, (\cos(t)+1) - \frac{4}{c_h e}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y_s(t) &= \left(\frac{2}{c_h}\, e^{-\cos(t)}\, (\cos(t)+1) - \frac{4}{c_h e}\right) y_h \\
&= \left(\frac{2}{c_h}\, e^{-\cos(t)}\, (\cos(t)+1) - \frac{4}{c_h e}\right) c_h e^{\cos(t)} \\
&= 2\,(\cos(t)+1) - 4e^{\cos(t)-1}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also:

$$y(t) = y_s(t) + y_h(t) = 2\,(\cos(t)+1) - 4e^{\cos(t)-1} + c_h\, e^{\cos(t)}\ .$$

Einsetzen der Anfangswertbedingung ergibt:

$$y(0) = 2(1+1) - 4e^{1-1} + c_h e \stackrel{!}{=} 1 \qquad \Rightarrow c_h\, e = 1 \qquad \Rightarrow c_h = \frac{1}{e}\ .$$

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems schließlich:

$$y(t) = 2\,(\cos(t)+1) - 4e^{\cos(t)-1} + e^{\cos(t)-1}\ .$$

Alternativ: Man kann eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t), \text{ mit } y(t_0) = y_0$$

auch mit den folgenden Formeln lösen:

$$
\begin{aligned}
y_h(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) \\
c(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{y_h(s)}\,ds + y_0 \\
y(t) &= c(t)y_h(t)
\end{aligned}
$$