Aufgabe 45: Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$.
Lösen Sie diese Differentialgleichung näherungsweise mit MATLAB unter Verwendung

a) des Eulerschen Polygonzugverfahrens

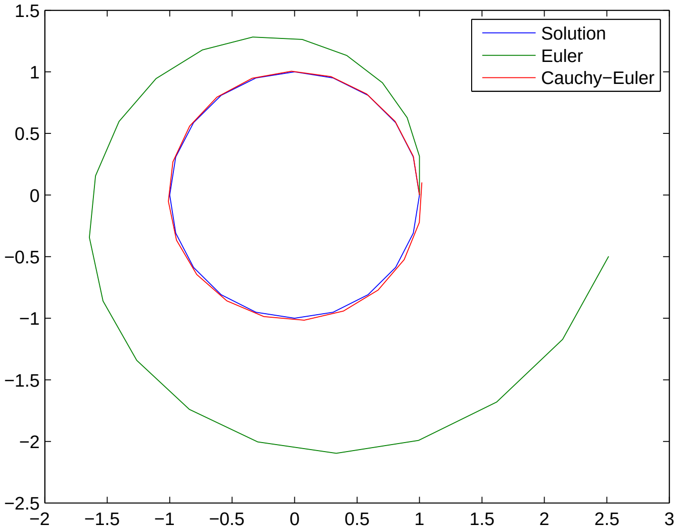
b) des Cauchy-Euler-Verfahrens

für $t \in [0, 2\pi]$. Verwenden Sie die konstante Zeitschrittweite $\tau = \frac{2\pi}{20}$. Zeichen Sie die Lösungskurve und ihre beiden Approximationen. Berechnen Sie für beide Verfahren den Fehler zur Zeit 2π für $\tau = \frac{2\pi}{20}$, $\tau = \frac{2\pi}{40}$ sowie $\tau = \frac{2\pi}{80}$.

LÖSUNG:

```
% compare Euler and Cauchy-Euler ODE solvers
function ode_compare

% initial value
x0 = [1 0];
% end time
T = 2*pi;
% time intervals
N = 20;

% right hand side of ODE
function x_prime = f ( t, x )
x_prime (1) = -x (2);
x_prime (2) =  x (1);
end

% compute one explicit Euler step
function x_new = eulerstep ( x_old, t, tau )
x_prime = f ( t, x_old );
x_new = x_old + tau * x_prime;
end

% compute one explicit Cauchy-Euler step
function x_new = cauchyeulerstep ( x_old, t, tau )
x_prime_old = f ( t, x_old );
x_mid = x_old + 0.5 * tau * x_prime_old;
```

```
x_prime_mid = f ( t + 0.5 * tau, x_mid );
x_new = x_old + tau * x_prime_mid;
end

% compute timestep size
tau = T / N;
% initialize
xe (1, :) = x0; % Euler solution
xc (1, :) = x0; % Cauchy-Euler solution

% compute time steps with both methods
for i = 1 : N
    xe (i+1, :) = eulerstep (xe (i, :), (i-1) * tau, tau);
    xc (i+1, :) = cauchyeulerstep (xc (i, :), (i-1) * tau, tau);
end

% compute correct solution
ts = 0 : tau : T;
xs (:, 1) = cos (ts);
xs (:, 2) = sin (ts);

% plot results
plot (xs (:, 1), xs (:, 2), xe (:, 1), xe (:, 2), xc (:, 1), xc (:, 2));
legend ('Solution', 'Euler', 'Cauchy-Euler');

% error
euler_error = norm (xs (N, :) - xe (N, :))
cauchy_euler_error = norm (xs (N, :) - xc (N, :))
end
```



Für den Fehler gilt

	$\tau = \frac{2\pi}{20}$	$\tau = \frac{2\pi}{40}$	$\tau = \frac{2\pi}{80}$
Euler	1.4741	0.6118	0.2753
Cauchy-Euler	0.0990	0.0252	0.0064

Aufgabe 46: Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) := \int\limits_{-x^2}^{x^2} \frac{\sin(xy)}{y} \, dy.$$

LÖSUNG:

$$f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \frac{\sin(xy)}{y} \, dy \, .$$

Leibniz-Regel $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_{-x^2}^{x^2} \cos(xy)\, dy + \frac{\sin(x^3)}{x^2} \cdot 2x - \frac{\sin(-x^3)}{-x^2} \cdot (-2x) \\
&= 2\frac{\sin(x^3)}{x} + 2\frac{\sin(x^3)}{x} + \frac{1}{x}\int_{-x^3}^{x^3} \cos z \, dz \quad (z = xy,\ dz = x\,dy) \\
&= 4\frac{\sin(x^3)}{x} + \left.\frac{\sin z}{x}\right|_{-x^3}^{x^3} \\
&= 4\frac{\sin(x^3)}{x} + \frac{\sin(x^3)}{x} - \frac{\sin(-x^3)}{x} \\
&= 6\frac{\sin(x^3)}{x}
\end{aligned}$$

Benutzt: $\sin(-x^3) = -\sin(x^3)$

Aufgabe 47: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Betrachten Sie die durch

$$x(t) := \frac{1}{k} \int_0^t f(u) \ \sin\left(k(t-u)\right) du$$

definierte Funktion.

a) Berechnen Sie $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $x = x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$$

ist und die Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ erfüllt.

LÖSUNG:

a) Nach der Leibniz-Regel für das Ableiten von parameterabhängigen Integralen mit variablen Grenzen (siehe Vorlesung) gilt:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{1}{k}\, f(t)\, \sin\left(k(t-t)\right) + \frac{1}{k}\int_0^t f(u)\, \cos\left(k(t-u)\right)\, k\, du \\ &= \int_0^t f(u)\, \cos\left(k(t-u)\right)\, du\ .\end{aligned}$$

Dabei haben wir $\sin 0 = 0$ benutzt.

Wendet man die Leibniz-Regel nocheinmal an, so erhält man

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= f(t)\, \cos\left(k(t-t)\right) - k\int_0^t f(u)\, \sin\left(k(t-u)\right)\, du \\ &= f(t) - k^2 x(t)\ ,\end{aligned}$$

wobei wir $\cos 0 = 1$ beachtet haben.

b) Offensichtlich ergibt sich aus dem vorhergehenden, daß die Funktion $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$ ist.

Die Anfangswertbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ergeben sich ebenfalls unmittelbar (aus der Definition von $x(t)$ als Integral bzw. der berechneten Formel für $\dot{x}(t)$ als Integral und der Tatsache, daß

$$\int_a^a g(t)\, dt = 0$$

ist für jede integrierbare Funktion $g = g(t)$).

Aufgabe 48: Sei d eine positive reelle Zahl (eine zu messende Länge in Metern).

a) Wir betrachten die beiden Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass der Abstand der beiden Punkte gleich d ist.

b) Wir betrachten die Kurve $\bar{\Gamma}$, definiert durch

$$\bar{\gamma} : \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \to \mathbb{R}^2,\ \bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\bar{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\bar{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

c) Sei

$$R = \frac{6{,}37 \cdot 10^6}{0{,}13}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \end{pmatrix}, \quad T = \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right).$$

Wir betrachten die Kurve $\tilde{\Gamma}$, definiert durch

$$\tilde{\gamma} : [-T, T] \to \mathbb{R}^2,\ \tilde{\gamma}(t) = M + R \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

d) Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

e) Welche Kurve ist länger?

Wie groß ist die Längendifferenz für $d = 100; 1000; 10000$ [m]?

Wie groß ist der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\|$ für diese Werte von d?

f) $L(d) = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$ ist die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von $\arcsin(x)$ um $x = 0$ mit Fehlerterm vierter Ordnung.

Verwenden Sie diese, um eine Näherungsformel für die Längendifferenz zu finden.

Vergleichen Sie deren Ergebnisse mit den exakten Ergebnissen für $d = 100; 1000; 10000$ [m].

LÖSUNG:

a) $\|B - A\| = d$

b)

$$\bar{\gamma}\left(-\frac{d}{2}\right) = A, \quad \bar{\gamma}\left(\frac{d}{2}\right) = B, \quad \bar{\gamma} \text{ stetig}$$

$$\|\dot{\bar{\gamma}}(t)\| = 1$$

$$\int_{\bar{\Gamma}} 1\,dl = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} 1 \cdot 1\,dt = \frac{d}{2} - \left(-\frac{d}{2}\right) = d$$

Es handelt sich um die Gerade durch A und B.

c)

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}(-T) &= M + R\begin{pmatrix} -\sin T \\ \sqrt{1-\sin^2 T} \end{pmatrix} \\
&= M + R\begin{pmatrix} -\frac{d}{2R} \\ \frac{\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}}{R} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 - R\frac{d}{2R} \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} + R\frac{\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}}{R} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = A,
\end{aligned}$$

analog ergibt sich $\tilde{\gamma}(T) = B$ (einziger Unterschied: $+\sin T$ im ersten Schritt).

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = \sqrt{0 + R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = R$$

$$\int_{\tilde{\Gamma}} 1\,dl = \int_{-T}^{T} 1 \cdot R\,dt = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

Es handelt sich um einen Kreisbogen mit Radius R von A nach B (Lichtweg bei genügend großer Entfernung von der Erdoberfläche).

d) ...

e) $\tilde{\Gamma}$ ist länger.

Die Längendifferenz ist

$$2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right) - d.$$

Für $d = 100$ [m] ergibt sich die Differenz $1{,}73 \cdot 10^{-11}$ [m] (17 Pikometer).

Für $d = 1000$ [m] ergibt sich die Differenz $1{,}73 \cdot 10^{-8}$ [m] (17 Nanometer).

Für $d = 10000$ [m] ergibt sich die Differenz $1{,}73 \cdot 10^{-5}$ [m] (17 Mikrometer).

Der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\| = \tilde{\gamma}_2(0) = -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} + R$ ist offensichtlich der maximale Abstand der beiden Kurven.

Für $d = 100$ [m] ergibt sich der Abstand $2{,}55 \cdot 10^{-5}$ [m] (25 Mikrometer).

Für $d = 1000$ [m] ergibt sich der Abstand $2{,}55 \cdot 10^{-3}$ [m] (2,5 Millimeter).

Für $d = 10000$ [m] ergibt sich der Abstand $2{,}55 \cdot 10^{-1}$ [m] (25 Zentimeter).

f)

$$
\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arcsin''(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3} \\
\arcsin'''(x) &= \frac{2x^2+1}{\sqrt{1-x^2}^5} \\
\arcsin(0) &= 0 \\
\arcsin'(0) &= 1 \\
\arcsin''(0) &= 0 \\
\arcsin'''(0) &= 1 \\
\arcsin(x) &= 0 + x + 0 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) \\
L(d) &= 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right) \\
&= 2R\left(\frac{d}{2R} + \frac{1}{6}\frac{d^3}{8R^3} + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right)\right) \\
&= d + \frac{1}{24}\frac{d^3}{R^2} + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right) \\
\Rightarrow L(d) - d &= \frac{1}{24R^2} \cdot d^3 + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right)
\end{aligned}
$$

Es ergeben sich auf 5 signifikante Stellen die selben Werte wie oben.

Insbesondere sieht man hier direkt, dass sich bei zehnfacher Länge die tausendfache Differenz ergibt (d^3), mit $\frac{1}{24R^2} \approx 17 \cdot 10^{-18}$ erhält man leicht im Kopf die oben in Klammern angebenen Abschätzungen.