

# Vorlesungsfragen

## Einführung in die Numerik

26. Juni 2017

1. Wann ist eine Funktion  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  konvex, strikt konvex, gleichmäßig konvex? Zeigen Sie:  $f$  ist konvex auf  $X$  genau dann, wenn

$$f(x) - f(y) \geq \nabla f(y)^\top (x - y), \quad \forall x, y \in X.$$

Welche Voraussetzungen muß  $f$  dabei erfüllen?

2. Was ist der Tangentialkegel  $\mathcal{T}_X(x)$  einer Menge  $X \subset \mathbb{R}^d$ ? Erläutern und beweisen Sie die folgende Aussage: Es sei  $X$  nichtleer,  $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $x^*$  ein lokales Minimum von  $f(x) \rightarrow \min_{x \in X}$ . Dann gilt

$$\langle \nabla f(x^*), t \rangle \geq 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}_X(x^*).$$

3. Was ist ein KKT-Punkt? Welcher Zusammenhang besteht zu stationären Punkten von  $f(x) \rightarrow \min_{x \in X}$ . (Beweis für die LICQ)
4. Welche Regularitätsvoraussetzungen gibt es? Wie hängen diese untereinander zusammen? Zeigen Sie, daß bei Erfülltheit der Abadie CQ jedes lokale Minimum (mit passenden Lagrangeschen Multiplikatoren) ein KKT-Punkt ist.
5. Wie vereinfachen sich die KKT-Bedingungen bei affin-linearen Bedingungen? (Beweis). Unter welchen Voraussetzungen handelt es sich dabei um eine konvexe Optimierungsaufgabe?
6. Es sei  $F : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ . Leiten Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von  $F(x) = 0$  her. Unter welchen Annahmen ist dieses durchführbar und konvergiert lokal quadratisch? Welche Varianten des Newton-Verfahrens gibt es?
7. Was ist ein Abstiegsverfahren? Erläutern Sie die Armijo-Regel.
8. Erläutern Sie das globalisierte Newton-Verfahren!
9. Erläutern Sie das SQP-Verfahren!
10. Leiten Sie das implizite Euler und das Euler-Heun Verfahren her!

11. Gegeben sei das Einschrittverfahren

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau_k \Phi(t_k, u^{(k)}, \tau_k).$$

Definieren Sie die Begriffe Konsistenzfehler, Konsistenzordnung, Konvergenz, Stabilität.

12. Zeigen Sie, daß das explizite Euler-Verfahren Konsistenzordnung 1 hat. Welcher Zusammenhang besteht zu Quadraturfehlern?

13. Gegeben sei das Einschrittverfahren

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau_k \Phi(t_k, u^{(k)}, \tau_k).$$

Warum ist Stabilität wichtig für Konvergenz? Unter welchen Voraussetzungen an  $\Phi$  ist das Einschrittverfahren stabil? (Beweis!)

14. Wie leitet man ein explizites Runge-Kutta Verfahren der Stufe  $s$  her? Was ist der Unterschied zu einem impliziten Runge-Kutta Verfahren?

15. Welche Verfahren sollten bei steifen Differentialgleichungen eingesetzt werden? Gegeben sei das Einschrittverfahren

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau_k \Phi(t_k, u^{(k)}, \tau_k).$$

Erläutern Sie den Begriff Stabilitätsbereich und bestimmen Sie diesen für das explizite und implizite Euler-Verfahren.

16. Erläutern Sie den Begriff  $A$ -Stabilität. Geben Sie ein  $A$ -stabiles Verfahren an! Gibt es explizite  $A$ -stabile Runge-Kutta-Verfahren? Erläutern Sie den Begriff  $B$ -Stabilität.