Einführung in die numerische Mathematik

Sommersemester 2017
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 10.

Abgabedatum: **04.07.2017**.

Aufgabe 1. (Fehlerabschätzungen von Quadraturverfahren)

Zeigen Sie Lemma 2.7 aus der Vorlesung. Für $f \in C^1([a,b],\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\left\| \int_a^b f(t)dt - (b-a)f(a) \right\| \leq (b-a) \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Konsistenzordnung)

Ein 2-stufiges Runge-Kutta-Verfahren sei gegeben durch das Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & c_2 & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass dieses Verfahren die Konsistenzordnung 2 hat, falls folgende Gleichungen für die Parameter erfüllt sind

$$b_1 + b_2 = 1, \qquad b_2 c_2 = \frac{1}{2}.$$

Zeigen Sie anschließend, dass das verbesserte Euler und das Euler-Heun Verfahren Konsistenzordnung 2 besitzen.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Verfahren dritter Konsistenzordnung)

Ein 3-stufiges Runge-Kutta-Verfahren sei gegeben durch das Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & c_2 & & \\ c_3 & c_3 - a_{32} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

Man kann zeigen, dass dieses Verfahren die Konsistenzordnung 3 hat, falls folgende, nichtlineare Gleichungen für die Parameter erfüllt sind

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1, \qquad b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2},$$
$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}, \qquad b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}.$$

Finden Sie eine Lösung des Gleichungssystems und geben Sie die Inkrementfunktion des zugehörigen Verfahrens an.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Runge-Kutta-Verfahren)

Wir betrachten die Differentialgleichung $u' = f(t,u)$. Sei f Lipschitz-stetig in u mit Lipschitz-Konstante L. Zeigen Sie, dass für ein explizites, s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren die Inkrementfunktion $\Phi(t,u,\tau)$ mit

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} + \tau\Phi(t_i, u^{(i)}, \tau)$$

Lipschitz-stetig in u ist. Verifizieren Sie, dass für die Lipschitz-Konstante M von Φ gilt

$$M = L\Bigg(\sum_{i=1}^{s} |b_i| + \tau L \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1} |b_i a_{i,j}| + \mathcal{O}\big(\tau^2\big)\Bigg).$$

Hinweis. Leiten Sie eine Lipschitz-Bedingung der Art

$$\|g_i(t,u,\tau) - g_i(t,v,\tau)\| \leq L\Bigg(\|u-v\| + \underbrace{\tau\sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| \|g_j(t,u,\tau) - g_j(t,v,\tau)\|\Big)}_{=\mathcal{O}(\tau)}\Bigg)$$

her und brechen Sie die Rekursion geeignet ab.

(4 Punkte)

Aufgabe 5. (Zusatzaufgabe)

Sei p ein Polynom vom Grad $\leq r-1$. Zeigen Sie, dass jedes Runge-Kutta-Verfahren der Konsistenzordnung r das Anfangswertproblem

$$u'(t) = p(t), \quad u(t_0) = u_0$$

exakt löst, das heisst, es gilt $u^{(j)} = u(t_j)$ für alle $j \geq 0$.
Hinweis. Berechnen Sie $u^{(1)}$ und vergleichen Sie dies mit der Taylor-Entwicklung der Funktion $u(t_1)$ um t_0.