Einführung in die numerische Mathematik

Sommersemester 2017
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 5.

Abgabedatum: **23.05.2017**.

Aufgabe 1. (Quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens)
Es sei $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie ohne Verwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung, also auch ohne Lemma 1.32 aus der Vorlesung, dass für $y \to z$ gilt

$$\|F(y) - F(z) - F'(y)(y-z)\|_2 \leq C\|y-z\|_2^2$$

mit einer Konstanten $C > 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Superlineare Konvergenz des Newton-Verfahrens)
Die Funktion F erfülle Annahme 1.1 aus der Vorlesung. Zudem sei der Punkt $x^* \in D$ eine Nullstelle von F und $x^{(0)}$ sei eine Startnäherung mit

$$x^{(0)} \in B_\gamma(x^*) = \{z \in \mathbb{R}^d : \|z - x^*\|_V \leq \gamma\},$$

wobei γ hinreichend klein ist. Zeigen Sie, dass die Iterierten des Newton-Verfahrens superlinear gegen x^* konvergieren.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Superlineare Konvergenz des inexakten Newton-Verfahrens)
Beweisen Sie die ersten beiden Aussagen von Satz 1.34 aus der Vorlesung:
Die Funktion F erfülle Annahme 1.1 und x^* sei eine Nullstelle von F. Dann gibt es ein $\gamma > 0$, so daß für alle $x^{(0)} \in \mathcal{B}_\gamma(x^*)$ die folgenden Aussagen gelten:

- Ist $\eta_k < \eta$ für hinreichend kleines $\eta > 0$, dann ist das inexakte Newton-Verfahren wohldefiniert mit
$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*.$$
- Falls $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$, dann ist die Konvergenzrate superlinear.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Vereinfachtes Newton-Verfahren)
Betrachten Sie das durch die Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \nabla^2 f(x^{(0)})^{-1} \nabla f(x^{(k)})$$

gegebene vereinfachte Newton-Verfahren. Sei hierzu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar und besitze einen stationären Punkt x^*, an dem $\nabla^2 f(x^*)$ positiv definit ist. Zeigen Sie, dass dann ein $\delta > 0$ existiert, so dass das vereinfachte Newton-Verfahren für jeden Startwert $x^{(0)} \in \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\|_2 < \delta\}$ eine Folge $\{x^{(k)}\}$ definiert, die linear gegen x^* konvergiert.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Newton-Verfahren)

Schreiben Sie ein MATLAB/Octave Programm welches zu gegebener Funktion $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, Startnäherung $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$, Toleranz $\varepsilon = 10^{-8}$ und maximaler Iterationszahl $it_{\max} = 20$ das Newtonverfahren zur Bestimmung stationärer Punkte von F durchführt. Als Abbruchkriterium soll sowohl $\|\nabla F(x^{(n)})\|_2 \leq \varepsilon$ als auch $\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_2 \leq \varepsilon$ erfüllt sein oder die maximale Iterationsanzahl erreicht sein. Testen Sie ihr Verfahren anhand der folgenden zwei Beispiele, indem Sie die Iterationsanzahl sowie einen Konvergenzplot der Iterierten des Verfahrens im semilogarithmischen Plot ausgeben. Beurteilen Sie, ob das Newton-Verfahren für die Testbeispiele gut geeignet ist.

a) Betrachten Sie die Funktion

$$F(x_1, x_2) = 6.9x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 5\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

und verwenden Sie als Startwerte zum einen $x^{(0)} = [1, 0.66]^\top$ sowie $x^{(0)} = [1, 0.67]^\top$.

b) Betrachten Sie die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 2x$$

und verwenden Sie als Startwerte $x^{(0)} = 0$ sowie $x^{(0)} = -10$.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 30.05.2017 und 31.05.2017. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 22.05.2017–26.05.2017 aus.