Einführung in die numerische Mathematik

Sommersemester 2017
Prof. Dr. Sven Beuchler
Dr. Markus Siebenmorgen

universitätbonn

Aufgabenblatt 7.

Abgabedatum: **13.06.2017**.

Aufgabe 1. (Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite)

Betrachten Sie das durch die Vorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)})$$

gegebene Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite $\alpha > 0$.

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \|x\|_2^{3/2}$. Zeigen Sie, dass $\nabla f(x)$ nicht Lipschitzstetig ist, d.h. dass kein $L > 0$ existiert, so dass

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt. Beweisen Sie weiterhin, dass obiges Verfahren für dieses f entweder nach endlich vielen Schritten das Optimum $x^* = 0$ erreicht oder nicht gegen x^* konvergiert.

b) Sei nun f definiert als $f(x) = \|x\|_2^{\beta+2}$ mit $\beta > 0$. Geben Sie Bedingungen an α und $x^{(0)}$ an, für die das obige Verfahren konvergiert bzw. divergiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Penalty-Funktion)

Betrachten Sie das quadratische Optimierungsproblem

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x + \gamma \qquad \text{u.d.N.} \quad h(x) :\, = b^\top x = 0,$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch positiv definit ist und $b, c \in \mathbb{R}^d$, $b \neq 0$ sowie $\gamma \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen sie die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^d$ des Minimierungsproblems sowie den zugehörigen Lagrange-Parameter $\lambda^* \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie zu festem $\alpha > 0$ das Minimum $x^{(\alpha)}$ der zugehörigen Penalty-Funktion

$$P(x;\alpha) = f(x) + \frac{\alpha}{2}(h(x))^2.$$

c) Zeigen Sie, dass $x^* = \lim_{\alpha\to\infty} x^{(\alpha)}$.

d) Zeigen Sie, dass $\lambda^* = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha h(x^{(\alpha)})$.

e) Berechnen Sie die Hesse-Matrix der $\mathcal{H}_P$ von $P(x;\alpha)$ und zeigen Sie

$$\lim_{\alpha\to\infty} \mathrm{cond}_2(\mathcal{H}_P) = \infty.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Systemsteuerung)

Wir betrachten zu gegebenem $y_d \in \mathbb{R}^d$ das Minimierungsproblem

$$\min_{y \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}(y - y_d)^\top M_y (y - y_d) + \frac{\alpha}{2} u^\top M_u u$$

unter den Nebenbedingungen

$$Ky = Bu,$$

wobei $M_y \in \mathbb{R}^{d \times d}, M_u \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $K \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch positiv definit seien. Ferner sei $B \in \mathbb{R}^{d \times n}$. Stellen Sie die Lagrangefunktion zu obigem Minimierungsproblem auf und leiten Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung der KKT-Punkte her.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Wiederholung ODEs)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme $y' = Ay,\ y(0) = y_0$ mit konstanten Koeffizienten für

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(mittels der Eigenwertzerlegung von A)

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(mittels der komplexen Eigenwertzerlegung von A)

c)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(mittels der Jordannormalform von A)

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Powell–symmetric–Broyden–Verfahren)

Schreiben Sie ein MATLAB/Octave Programm welches zu gegebener Funktion $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, Startnäherung $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$, Toleranz $\varepsilon = 10^{-8}$ und maximaler Iterationszahl $it_{\max} = 30$ das Powell–symmetric–Broyden–Verfahren zur Bestimmung stationärer Punkte von F durchführt. Verwenden Sie als Startmatrix $A^{(0)} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Einheitsmatrix.

Algorithmus 1. *Powell–symmetric–Broyden–Verfahren*

(1) Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$, $A^{(0)} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch, $\epsilon \geq 0$, und setze $k := 0$.

(2) Ist $\|\nabla F(x^{(k)})\|_2 \leq \epsilon$: STOP.

(3) Bestimme $d^{(k)}$ durch $\quad d^{(k)} := -\left(A^{(k)}\right)^{-1} \nabla F(x^{(k)})$.

(4) Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$, $q^{(k)} := x^{(k+1)} - x^{(k)}$, $y^{(k)} := \nabla F(x^{(k+1)}) - \nabla F(x^{(k)})$ und

$$\begin{aligned} A^{(k+1)} :=& A^{(k)} + \frac{(y^{(k)} - A^{(k)}q^{(k)})(q^{(k)})^T + q^{(k)}(y^{(k)} - A^{(k)}q^{(k)})^T}{(q^{(k)})^T q^{(k)}} \\ &- \frac{(q^{(k)})^T(y^{(k)} - A^{(k)}q^{(k)})q^{(k)}(q^{(k)})^T}{((q^{(k)})^T q^{(k)})^2}. \end{aligned}$$

(5) Setze $k := k + 1$ und gehe zu (2).

a) Betrachten Sie die Funktion von *Himmelblau*

$$F(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$

und verwenden Sie als Startwerte $x^{(0)} = [0, 0]^\top$, $x^{(0)} = [2, 2]^\top$ sowie $x^{(0)} = [10, 10]^\top$.

b) Betrachten Sie die *Rosenbrock-Funktion*

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2$$

und verwenden Sie als Startwert $x^{(0)} = (-1.2, 1)^T$.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt in den Cip-Pools am 20.06.2017 und 21.06.2017. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der Woche vom 12.06.2017–16.06.2017 aus.