Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2018
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich

Übungsblatt 11.

Abgabe am **02.07. vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Quadratur von Polynomen)

a. Machen Sie sich noch einmal klar, dass die Simpson-Regel das Polynom $p(x) = x^3$ exakt integriert.

b. Zeigen Sie, dass der Fehler der Simpson-Regel zur Berechnung des Integrals $\int_a^b x^4 \, dx$ exakt gleich $(b-a)^5/120$ ist.

c. Schätzen Sie ab, wie viele Funktionsauswertungen minimal nötig sind, damit der Integrationsfehler der Simpson-Summe (zusammengesetzte Simpson-Regel) für das Integral $\int_1^2 x^4 \, dx$ kleiner als 10^{-8} wird.

$(1 + 1 + 2 = 4$ Punkte)

Aufgabe 2. (Zusammengesetzte Newton-Cotes Formeln)

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx$$

näherungsweise auf der Unterteilung

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/4, \quad x_2 = 1/2, \quad x_3 = 3/4, \quad x_4 = 1$$

mit Hilfe der

a. zusammengesetzten Mittelpunktsregel,

b. zusammengesetzten Trapezregel,

c. zusammengesetzten Simpsonregel.

$(1 + 1 + 1 = 3$ Punkte)

Aufgabe 3. (Zusammengesetzte Trapezregel)

Es soll

$$I = \int_0^2 \ln(2x+1) \, dx$$

mit der zusammengesetzten Trapezsumme T_n berechnet werden.

a. Wieviele Teilintervalle sind hinreichend, um den Fehler $|I - T_n| \leq 2/3$ garantieren zu können?

b. Verwenden Sie die Anzahl der Teilintervalle aus a) um eine Approximation an I mit der zusammengesetzten Trapezsumme zu bestimmen. Wie groß ist der tatsächliche Fehler?

$(2 + 2 = 4$ Punkte)

Aufgabe 4. (Quadratur periodischer Funktionen)

Wir betrachten nun 2π-periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Glattheit lässt sich bekanntlich durch Abklingverhalten der Fourierkoeffizienten messen. Wir betrachten für $r > 0$ die Klasse

$$E^r = \{f \ : \ N_r(f) := \sup_{k\in\mathbb{Z}} (1 + |k|)^r |f_k| < \infty\} .$$

Dabei stellt f_k den k-ten Fourierkoeffizient dar (siehe Aufgabe 10.2). Wir betrachten weiterhin die Klasse $C^m(\mathbb{T})$ aller 2π-periodischen Funktionen, die m-fach stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ sind. Dabei stellt $\mathbb{T}$ das Intervall $[0, 2\pi]$ mit indentifizierten Endpunkten dar (Einheitskreislinie).

a. Zu welcher Glattheitsklasse E^r gehört die Funktion aus Aufgabe 10.1a?

b. Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass für $m \in \mathbb{R}$ die Einbettung

$$C^m(\mathbb{T}) \subsetneq E^m$$

gilt.

c. Betrachten Sie die trigonometrische Interpolation aus Aufageb 9.2 und gewinnen Sie daraus eine Quadraturformel $T^{\pi}_{2n+1}(f)$ auf den Stützstellen

$$x_\ell = \frac{2\pi\ell}{2n+1} \quad , \quad \ell = 0, ..., 2n .$$

Unter welchem Namen kennen Sie diese Quadraturformel noch? **Hinweis:** Beachten Sie die Periodizitätsannahme.

Zeigen Sie mit Hilfe der der Formel in Aufgabe 10.2a, dass es eine Konstante C_r gibt, so dass für alle $f \in E^r$

$$|I(f) - T^{\pi}_{2n+1}(f)| \leq C_r n^{-r} N_r(f) \quad , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Interpretieren Sie diese Abschätzung und vergleichen Sie mit der Quadratur nichtperiodischer glatter Funktionen.

(2 + 3 + 4 = 9 Punkte)