Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2018
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich

Übungsblatt 12.

Abgabe am **09.07. vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Fixpunktiteration)

Sei $a > 0$, $I := \left[\frac{3}{4a}, \frac{1}{a}\right]$ sowie

$$f : I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 2x - ax^2.$$

a. Zeigen Sie: f hat in I genau einen Fixpunkt.

b. Wie viele Iterationsschritte werden benötigt um mit Hilfe der Iterationsvorschrift $x_{n+1} := f(x_n)$ und $x_0 \in I$ die Zahl $1/a$ mit Genauigkeit $\varepsilon > 0$ zu approximieren?

Bemerkung: In einigen Mikroprozessoren wurde so die Division von Floats implementiert.

(1+1=2 Punkte)

Aufgabe 2. (Fixpunktiteration)

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^x}{4}$$

besitzt im Intervall $[0.5, 1]$ genau eine Nullstelle, die man iterativ bestimmen will. Dafür seien die Iterationsvorschriften

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2} - \frac{e^{x_n}}{4} &&=: \varphi_1(x_n) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{2 - e^{x_n}}{e^{x_n}} &&=: \varphi_2(x_n) \end{aligned}$$

gegeben.

a. Wie lassen sich obige Iterationsvorschriften herleiten?

b. Überprüfen Sie jeweils für φ_1 und φ_2 die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

c. Welches Verfahren konvergiert schneller, und warum?

   Hinweis: Bestimmen Sie die jeweilige Konvergenzordnung.

d. Welche (ungefähre) asymptotische Aussage lässt sich über die Anzahl der richtigen Dezimalstellen der Iterierten jeweils machen?

e. Angenommen die Iteration mit φ_1 soll numerisch implementiert werden. Geben Sie ein praktikables Kriterium an, das es erlaubt, zu entscheiden, ob die aktuelle Iterierte die Nullstelle bereits mit Genauigkeit ε approximiert.

(1+2+2+2+1=8 Punkte)

Aufgabe 3. (Fixpunktiteration)

a. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine surjektive Abbildung, derart, dass $\|f(x)-f(y)\| \geq c\|x-y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit einem fixen $c > 1$ gilt.

   i. Man zeige, dass f einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

   ii. Für welche Startwerte konvergiert die Folge der Iterierten gegen diesen Fixpunkt?

b. Gegeben seien viermal stetig differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche den gleichen Fixpunkt x^* besitzen. Das Iterationsverfahren für f konvergiere mit der Ordnung 2 gegen x^* und das Iterationsverfahren für g konvergiere mit der Ordnung 3 gegen x^*.

   Mit welcher Ordnung konvergiert das durch $x_{n+1} = f(g(x_n))$ definierte Verfahren? Belegen Sie Ihre Vermutung.

(2+1+2=5 Punkte)

Aufgabe 4. (Newton-Verfahren)

Sei $GL(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : X \text{ invertierbar}\}$ und

$$\mathrm{Inv} : GL(n) \to GL(n), \qquad X \mapsto X^{-1}$$

die Matrix-Inversion.

a. Zeigen Sie, dass Inv stetig differenzierbar ist, indem Sie für jedes $X \in GL(n)$ den linearen Operator $D\,\mathrm{Inv}(X) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ bestimmen. Ist $D\,\mathrm{Inv}(X)$ invertierbar? Wenn ja, wie lautet der inverse Operator?

b. Sei nun $A \in GL(n)$. Zeigen Sie, dass die rekursiv durch

$$X_{k+1} = X_k + X_k(1 - AX_k)\,, \quad X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}\,.$$

   definierte Folge lokal quadratisch gegen A^{-1} konvergiert.

   Hinweis: Betrachten Sie das Newton-Verfahren für eine geeignete Funktion.

(2+3=5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Newton-Verfahren)

Bearbeiten Sie die im jupyter-notebook auf der Vorlesungs-Webseite bereitgestellte Aufgabe. Diese Aufgabe kann weitgehend auch ohne Theorie aus der Mittwochs-Vorlesung bearbeitet werden.

(3+2+2+3+1+1=12 Punkte)

Diese (letzte) Programmieraufgabe wird in der Woche vom 09.07. bepunktet.