Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2018
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich

Übungsblatt 3.

Abgabe am **30.04. vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Totale Wahrscheinlichkeit)

Ein Würfel wird sieben Mal geworfen, die Resultate seien $N, X_1, X_2, \ldots, X_6$. Anschließend bildet man die Summe $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$, deren Länge vom ersten Würfelwurf bestimmt ist. Was ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen Z? Verwenden Sie den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Satz von Bayes)

Bei einer Eignungsprüfung sei ein Test zu bestehen. Ein geeigneter Bewerber bestehe den Test mit der Wahrscheinlichkeit $9/10$, ein ungeeigneter Bewerber mit der Wahrscheinlichkeit $1/5$. Erfahrungsgemäß erweisen sich ohne Test nur 40% der Bewerber als geeignet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann ein Bewerber, der den Test bestanden hat, tatsächlich geeignet?

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Unabhängigkeit I)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie

a. A und $\emptyset$ sowie A und Ω sind stochastisch unabhängig.

b. Es gelte $A \subset B$. Dann folgt:

$$A \text{ und } B \text{ sind stochastisch unabhängig} \Leftrightarrow P(A) = 0 \text{ oder } P(B) = 1.$$

c. Es gelte $0 < P(B) < 1$ und $A \cap B = \emptyset$. Dann folgt:

$$P\big(A^c | B\big) = P\big(A | B^c\big) \Leftrightarrow P(A) + P(B) = 1.$$

$(2 + 2 + 2 = 6$ Punkte)

Aufgabe 4. (Unabhängigkeit II)

a. In einer Urne befinden sich $n, n \geq 2$, weiße Kugeln und n schwarze. Wir ziehen nacheinander zwei Kugeln, **ohne** die erste Kugel wieder zurückzulegen. Das Ereignis B tritt ein, wenn die erste Kugel weiß ist, während A im Fall, dass die zweite Kugel schwarz ist, eintritt. Sind A und B stochastisch abhängig oder unabhängig voneinander? Begründen Sie Ihre Antwort! Was passiert für $n \to \infty$?

b. Beim zweimaligen Würfeln seien die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 wie folgt definiert. A_1 tritt genau dann ein, wenn der erste Wurf gerade ist, A_2 falls der zweite Wurf ungerade ist und A_3 im Fall, dass die beiden Würfe unterschiedliche Parität besitzen. Stellen Sie die Ereignisse als Mengen in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum dar und überprüfen Sie, ob die Ereignisse paarweise stochastisch unabhängig bzw. (vollständig) unabhängig sind.

$(3 + 3 = 6$ Punkte)