Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2018
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 5.

Abgabe am **14.05. vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Mittlere quadratische Abweichung)

Sei X eine Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Wir betrachten die Funktion

$$f(a) = E[(X-a)^2] \quad , \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie, dass f an $a = EX$ minimal wird.

(3 Punkte)

Aufgabe 2. (Binomialverteilung, hypergeometrische Verteilung)

Geben Sie die Massenfunktionen $p(k) = P(X = k)$ der Binomialverteilung $\text{Bin}(n,p)$ mit Parametern n und p und der hypergeometrischen Verteilung $H(n,m,r)$ mit Parametern n, m und r an (Bezeichnung wie im alternativen Vorlesungsskript). Zeigen Sie: Für $m \to \infty$ und $r \to \infty$ mit $p = r/m$ konstant und n fest konvergiert die hypergeometrische Verteilung gegen die Binomialverteilung mit Parametern n und p (Gemeint ist hier, dass die Massenfunktion punktweise für alle k konvergiert).

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Erwartungswert und Varianz stetiger Zufallsgrößen)

Sei X eine Zufallsgröße, deren Verteilung durch folgende Dichtefuntion gegeben ist

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\Big(-\frac{\ln(x)^2}{2\sigma^2}\Big), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

mit $\sigma > 0$.

a. Zeigen Sie, dass f eine Dichtefunktion ist.

b. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X in Abhängigkeit von σ.

($2 + 2 = 4$ Punkte)

Aufgabe 4. (Exponentialverteilung)

Die Wartezeit an der Kasse in einem Supermarkt beträgt durchschnittlich 4 Minuten und ist exponentialverteilt. Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie weniger als 3 Minuten an der Kasse anstehen.

(2 Punkte)

Aufgabe 5. (Normalverteilung)

Eine Fabrik stellt Keramikkondensatoren her. Fertigungsbedingt variiert die Kapazität der einzelnen Bauteile, wobei wir annehmen, dass sie normalverteilt ist mit Erwartungswert $99\mu F$ und Standardabweichung $3\mu F$.

a. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kondensator eine Kapazität zwischen $95\mu F$ und $105\mu F$ besitzt?

b. Eine Änderung der Fertigungstechnik ermöglicht eine günstigere Produktion, wobei der Erwartungswert nun, bei $2\mu F$ Standardabweichung, $100\mu F$ beträgt. Wie hoch ist nun der Anteil der Kondensatoren, deren Kapazität nicht in dem in Teilaufgabe a) angegebenen Intervall liegt?

c. Ein Kunde der Fabrik benötigt nun Kondensatoren mit Kapazitäten zwischen $99\mu F$ und $101\mu F$. Wie groß darf die Standardabweichung maximal sein, damit bei einem Erwartungswert von $100\mu F$ durchschnittlich 90% der Fertigung für den Kunden geeignet sind?

Hinweis: Nutzen Sie eine Tabelle für die Werte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

$(2 + 2 + 2 = 6$ Punkte)