Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2018
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 8.

Abgabe am **11.06. vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Der Approximationssatz von Weierstraß)

Beweisen Sie den Approximationssatz von Weierstraß. Dieser besagt, dass für jede stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Folge der Funktionen $B_n f(x)$ gegeben durch

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

gleichmäßig gegen f konvergiert. Die Funktion $B_n f$ bezeichnet man als n-tes Bernsteinpolynom der Funktion f. Mit anderen Worten, es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f - B_n f\|_\infty = 0$$

für alle stetigen Funktionen f. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm auf $[0,1]$. Gehen Sie wie folgt vor:

a. Berechnen Sie: $B_n(p_0), B_n(p_1)$ und $B_n(p_2)$ für $n \geq 1$, wobei $p_0 \equiv 1, p_1(x) = x$ und $p_2(x) = x^2$ gesetzt wird. Ist B_n eine Projektion auf Π_n, d.h. gilt $B_n^2 = B_n$? Interpoliert B_n die Funktion f in den Punkten k/n?

b. Überzeugen Sie sich, dass gilt

$$f(x) - B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

c. Zerlegen Sie den Summationsbereich in

$$\mathcal{I}_1(x) := \{k \in \{0,...,n\} \ : \ |k/n - x| < \delta\} \text{ und } \mathcal{I}_2(x) := \{k \in \{0,...,n\} \ : \ |k/n - x| \geq \delta\}.$$

Nutzen Sie nun die Stetigkeit von f (gleichmäßige Stetigkeit), um die Summe über $\mathcal{I}_1(x)$ abzuschätzen. Wählen Sie $\delta > 0$.

d. Nutzen Sie für die Abschätzung der Summe über $\mathcal{I}_2(x)$ die Formeln aus Teilaufgabe a).

$(1 + 1 + 2 + 2 = 6$ Punkte$)$

Aufgabe 2. (Lebesgue-Konstante)

Sei $I = [a,b]$ ein Intervall. Die Lebesgue-Konstante für die Polynominterpolation $(I_{n+1}f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ für $n+1$ Stützstellen $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ ist gegeben durch

$$\Lambda_{n+1} := \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|,$$

wobei $L_i(x) = w(x)/[(x - x_i)w'(x_i)]$, $i = 0, ..., n$.

a. Zeigen Sie die folgende Identität für die Norm des Operators I_n

$$\|I_n\| := \sup_{\substack{f \text{ stetig} \\ \|f\|_\infty = 1}} \|I_n f\|_\infty = \Lambda_n \,.$$

b. Zeigen Sie, dass für eine beliebige stetige Funktion f stets gilt

$$\|f - I_{n+1}(f)\|_\infty \leq (\Lambda_{n+1} + 1) \inf_{p \in \Pi_{n+1}} \|f - p\|_\infty \,,$$

wobei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm auf $[a, b]$ darstellt. Interpretieren Sie diese Ungleichung!

c. Zeigen Sie, dass es für äquidistante Stützstellen $x_i = i(b-a)/n$, $i = 0, ..., n$, eine universelle Konstante $c > 0$ gibt, so dass

$$\Lambda_n > c(1.9)^n$$

gilt. Was hat das hinsichtlich $\lim\limits_{n \to \infty} \|f - I_n f\|_\infty$ für ein festes stetiges f zur Folge? Vergleichen Sie mit Aufgabe 1.

(1 + 2 + 4 = 7 Punkte)

Aufgabe 3. (Polynominterpolation)

Berechnen Sie das Polynom fünften Grades, welches die Funktion $\sin(\frac{\pi x}{2})$ sowie ihre erste Ableitung an den Stellen $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ und $x_2 = 5$ interpoliert.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Trigonometrische Interpolation)

Zu den Stützpunkten

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y_i	1	3	5	1	1

a. berechne man das interpolierende trigonometrische Polynom

$$p(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + c_3 e^{3ix} \,.$$

b. Man gebe außerdem eine reelle Darstellung des trigonometrischen Polynoms in $\sin(x)$ und $\cos(x)$ an.

(2 + 1 = 3 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Runge-Phänomen)

Bearbeiten Sie die vierte Programmieraufgabe, die als Jupyter Notebook auf der Webseite zur Verfügung steht. Darin geht es um die Veranschaulichung des Runge-Phänomens.

(2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte)

Die Programmieraufgabe wird in der Woche vom 11.06. bepunktet.