Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2018
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich

Übungsblatt 9.

Abgabe am **18.06. vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Gleichmäßige Polynomapproximation mit Interpolationsbedingung)

Seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sowie Stützstellen $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ vorgegeben. Zeigen Sie, dass zu jedem $\epsilon > 0$ existiert eine Polynom p (der Grad ist nicht vorgeschrieben), für welches gilt:

$$\|f - p\|_\infty < \epsilon \quad \text{und} \quad p(x_i) = f(x_i) \text{ für } i = 0, \dots, n.$$

Hinweis: Es ist $\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$. Verwenden Sie den Weierstraßschen Approximationssatz (Aufgabe 8.1): Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Polynom p mit $\|f - p\|_\infty < \epsilon$. Verwenden Sie außerdem die Projektionseigenschaft der Lagrange-Interpolation ähnlich wie in Aufgabe 8.2 b).

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Trigonometrische Interpolation mittels Dirichlet-Kern)

Wir betrachten die folgende Interpolationsaufgabe: Finde ein trigonometrisches Polynom vom Grade n

$$t(x) = \sum_{|k| \le n} t_k \exp(ikx)\,, \tag{1}$$

das eine vorgegebene periodische Funktion f in den $2n+1$ äquidistanten Stützstellen

$$x_\ell = 2\pi \frac{\ell}{2n+1} \quad , \quad \ell = 0, ..., 2n\,,$$

auf $[0, 2\pi]$ interpoliert.

a. Zeigen Sie, dass sich $t(x)$ in der Form

$$t(x) = I_n f(x) := \frac{1}{2n+1} \sum_{\ell=0}^{2n} f(x_\ell) D_n(x - x_\ell)$$

schreiben lässt mit $D_n(t) = \sum_{|k| \le n} \exp(ikt)$ als den Dirichlet-Kern der Ordnung n.

b. Finden Sie eine geschlossene explizite (reelle) Darstellung für D_n und skizzieren Sie die Funktion. Mit welcher Ordnung wächst vermutlich die zugehörige Lebesgue-Konstante? Vergleichen Sie mit Aufgabe 8.2c.

$(2 + 2 = 4$ Punkte$)$

Aufgabe 3. (Eigenschaften der Fourier-Matrix)

Es sei

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{N}} T_N = \frac{1}{\sqrt{N}} [\exp(2\pi ijk/N)]_{\substack{j=0,\dots,N-1 \\ k=0,\dots,N-1}}$$

die normalisierte Fouriermatrix.

a. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{C}^N$

$$\|F_N x\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \|x\|_1 \, .$$

b. Zeigen Sie außerdem die Parsevalsche Gleichung

$$\|F_N x\|_2 = \|x\|_2 \quad , \quad x \in \mathbb{C}^N \, .$$

c. Zeigen Sie das folgende Unschärfeprinzip

$$\|x\|_0 + \|F_N x\|_0 \geq 2\sqrt{N} \quad , \quad x \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\} \, ,$$

wobei $\|x\|_0 := \#\{k \in \{1, ..., N\} \; : \; x_k \neq 0\}$ den Support des Vektors x darstellt (Beachten Sie, dass $\| \cdot \|_0$ keine Vektornorm darstellt.) Interpretieren Sie dieses Resultat! **Hinweis:** Zeigen Sie zunächst

$$\|x\|_0 \cdot \|F_N x\|_0 \geq \sqrt{N}$$

unter Nutzung von a) und b) und Cauchy-Schwarz. Starten Sie mit $\|F_N x\|_\infty$.

(1 + 2 + 3 = 6 Punkte)

Aufgabe 4. (Eigenwerte der Fourier-Matrix)

Wir betrachten erneut die Fouriermatrix F_N aus Aufgabe 3.

a. Berechnen Sie die Matrix $J_N := F_N^2$.

b. Zeigen Sie, dass F_N einen rellen Eigenwert $\lambda \in \{+1, -1\}$ und einen rein imaginären Eigenwert $\mu \in \{+i, -i\}$ haben muss.

(2 + 3 = 5 Punkte)