Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Präsenzübungen

für die Tutorien der zweiten Vorlesungswoche

Aufgabe 1.

a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen. Welche der Mengen $A \cap B$, $A \cup B$, $A + B$ und $A \times B$ sind sicherlich wieder konvex?

b) Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Welche der Funktionen $f + g$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sind im Allgemeinen wieder konvex?

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Es gibt keine konvexe offene Menge $C \subset \mathbb{R}^2$ derart, dass

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \left(1 + \|x\|_2^2\right)^{-1}$$

konvex auf C ist.

Aufgabe 3. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

a) Beweisen Sie: Ist $g : K \longrightarrow I$ (strikt) konvex und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (streng) monoton wachsend und konvex, dann ist die Komposition $f \circ g : K \longrightarrow \mathbb{R}$ (strikt) konvex.

b) Bleibt die Aussage richtig, wenn auf "monoton wachsend" verzichtet wird?

Aufgabe 4.
Wir betrachten die beiden Optimierungsprobleme

(I)

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{sodass} \quad & g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \le 0 \\ & g_2(x) = -x_1 \le 0 \\ & g_3(x) = -x_2 \le 0 \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) \\ \text{sodass} \quad & \tilde{g}_1(x) = (x_1 + x_2 - 1)^3 \le 0 \\ & g_2(x) \le 0 \\ & g_3(x) \le 0. \end{aligned}$$

Offenbar stimmen die zulässigen Mengen von (I) und (II) überein.

a) Überlegen Sie sich mit Hilfe einer Skizze, dass $x^* = (1/2, 1/2)$ die eindeutige Lösung von (I) und (II) ist.

b) Bestimmen Sie den Tangentialkegel der zulässigen Menge im Punkt x^*.

c) Bestimmen Sie den Linearisierungskegel für (I) bzw. (II) im Punkt x^*.

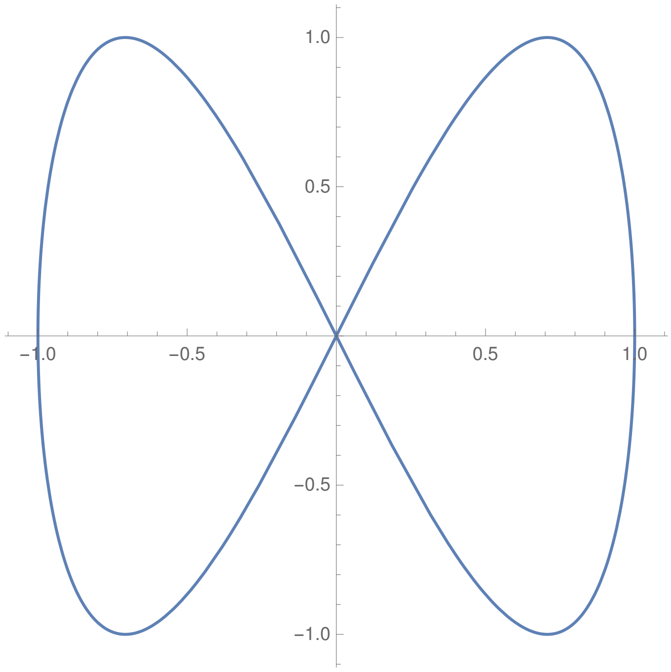
Aufgabe 5. Skizzieren Sie jeweils den Tangential- und Normalenkegel der folgenden Mengen $M_i \subset \mathbb{R}^2$ im Punkt $x_0 = (0,0) \in M_i$:

a) $M_1 = \{(t, t^2), t \in \mathbb{R}\}$,

b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq x^2\}$,

c) $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0, |y| = x^2\}$,

d) $M_4 = \{(\sin(\phi), \sin(2\phi)) \,:\, \phi \in [0, 2\pi]\}$,



e) $M_5 = \{(r\sin(2\phi), r\sin(\phi)), \phi \in [\pi, 2\pi], r \in [0, 1]\}$,