Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 10

Abgabe am 27. Juni vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Unter der Autonomisierung einer Differentialgleichung $\dot{y}(t) = f(t,y)$, $y(0) = y_0$, versteht man die Umwandlung in die äquivalente autonome Differentialgleichung

$$\dot{Y} = F(Y), \qquad Y(0) = Y_0$$

mit $Y(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ t \end{pmatrix}$ und entsprechendem F bzw. Y_0.

Autonomisierungsinvarianz eines Verfahrens bedeutet, dass dieses Verfahren sowohl bei Anwendung auf die ursprüngliche ODE $\dot{y} = f(t,y)$ als auch auf die autonomisierte ODE $\dot{Y} = F(Y)$ die gleiche Vorschrift liefert.

Zeigen Sie, dass ein *explizites* Runge-Kutta-Verfahren mit Stufenzahl m und dem Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times m},\ b, c \in \mathbb{R}^m,$$

genau dann invariant gegenüber Autonomisierung ist, wenn es konsistent ist und die Bedingungen

$$\sum_{\ell=1}^m a_{j\ell} = c_j \qquad \forall j = 1, \dots, m,$$

erfüllt sind.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Für $c \in \mathbb{R}^m$, $c_1 = 0$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$ ist das allgemeine Runge-Kutta-Verfahren mit $m \in \mathbb{N}$ Stufen bekanntlich gegeben durch:

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + h, \\ k_j(t_i, y_i, h) &:= f\left(x_i + hc_j, y_i + h\sum_{\ell=1}^m a_{j,\ell} k_\ell(t_i, y_i, h)\right), \qquad j = 1, \dots, m, \qquad (1) \\ y_{i+1} &:= y_i + h\sum_{\ell=1}^m b_\ell k_\ell(t_i, y_i, h). \end{aligned}$$

Offenbar muss hierfür das nichtlineare Gleichungssystem (1) gelöst werden.

Es erfülle nun f die Lipschitz-Bedingung aus dem Satz von Picard-Lindelöf, d.h.

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \le L\|y_1 - y_2\|$$

für alle $(t,y_1), (t,y_2) \in S := [0,T] \times \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es dann $h_0 = h_0(L,A)$ gibt, derart, dass das Gleichungssystem (1) für alle Schrittweiten $0 < h < h_0$ und $(t_i, y_i) \in S$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Banachscher Fixpunktsatz.

Aufgabe 3. (1 + 5 = 6 Punkte)

Für $\theta \in [0,1]$ sei ein Runge-Kutta-Verfahren mit folgender Verfahrensfunktion gegeben:

$$\varphi(t, y_i, y_{i+1}, h) := (1-\theta) f(t_i, y_i) + \theta f(t_{i+1}, y_{i+1}).$$

a) Geben Sie das zugehörige Butcher-Tableau an.

b) Untersuchen Sie das Verfahren auf Konsistenz.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Die Anwendung eines Einschrittverfahrens auf das Problem

$$y' = \lambda y, \qquad \text{mit} \quad \lambda < 0,$$

führt auf eine Rekursion der Form

$$y_{i+1} = g(h\lambda) \cdot y_i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

mit der sog. *Stabilitätsfunktion* $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.
Für die exakte Lösung $y(t) = \exp(\lambda t)$ gilt $y(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$, während $y_i \longrightarrow 0$ für $i \longrightarrow \infty$ dann und nur dann gilt, wenn $|g(z)| < 1$ für $z = h\lambda$ gilt. Man nennt daher $\mathcal{M} := \{z \in \mathbb{C} : |g(z)| < 1\}$ auch das *Stabilitätsgebiet* eines Verfahrens mit Stabilitätsfunktion g. Das Verfahren heißt *absolut stabil*, falls $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\} \subset \mathcal{M}$ gilt.

Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von θ) die Stabilitätsfunktion des Verfahrens aus Aufgabe 3 und geben Sie das jeweilige Stabilitätsgebiet an.
Was bedeutet dies für die Wahl der Schrittweite h?

Programmieraufgabe 1. (21 Punkte)

siehe `jupyter notebook`. Dies ist die letzte Programmieraufgabe.

Abgabe der Programmieraufgabe in der Woche 1. bis 5. Juli