Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 11

Abgabe am 4. Juli vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (**Bonusaufgabe:** 10 Punkte)

Ein m-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times m},\ b, c \in \mathbb{R}^m,$$

hat sog. *Radau-Form*, wenn $c_1 = a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1m} = 0$ oder $c_m = 1$ und $a_{1m} = a_{2m} = \ldots = a_{mm} = 0$ gilt.
Bestimmen Sie für $m = 2$ und den Fall $c_1 = a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1m} = 0$ die Parameter für ein Verfahren 3. Ordnung.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Das explizite Zweischrittverfahren

$$y_{i+2} = -4y_{i+1} + 5y_i + h(f_i + 4f_{i+1})$$

hat Konsistenzordnung 3. (Dies müssen Sie nicht nachrechnen.)
Bestimmen Sie explizit die Iterierten dieses Verfahrens angewandt auf das Anfangswertproblem

$$y' = 0, \qquad y(0) = 1,$$

mit den Startwerten $y_0 = 0$, $y_1 = 1 + \delta$, indem Sie die entsprechende lineare Differenzengleichung lösen. Was können Sie beobachten?

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Bestimmen Sie mittels Taylorentwicklung die Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so, dass das Mehrschrittverfahren

$$y_{i+3} - y_{i+1} + \alpha(y_{i+2} - y_i) = h\left(\beta(f_{i+2} - f_i) + \gamma f_{i+1}\right)$$

die Konsistenzordnung 3 hat.

Aufgabe 4. (4 + 4 = 8 Punkte)

Es sei das Mehrschrittverfahren

$$y_n + \gamma(y_{n-1} - y_{n-2}) - y_{n-3} = \frac{h}{2}(3+\gamma)(f_{n-1} + f_{n-2})$$

mit einem Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Welche Konsistenzordnung hat das Verfahren in Abhängigkeit von $\gamma \in \mathbb{R}$?

b) Welche maximale Konvergenzordnung kann mit dem Verfahren erreicht werden?

Hinweis: Zur Bearbeitung dieser Aufgabe dürfen Sie das folgende *wichtige* Resultat über die Konsistenzordnung linearer Mehrschrittverfahren verwenden, auch wenn dieses in der Vorlesung noch nicht behandelt wurde:

Lemma: Konsistenz linearer Mehrschrittverfahren
Sind für das lineare m-Schrittverfahren

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_j u_{\ell+j} = h \sum_{j=0}^{m} \beta_j f(t_{\ell+j}, u_{\ell+j}), \qquad \ell = 0, \dots, n-m,$$

mit einer p-mal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $p \geq 1$, die Gleichungen

$$\sum_{j=0}^{m} j^\nu \alpha_j - \nu j^{\nu-1} \beta_j = 0, \qquad \nu = 0, 1, \dots, p,$$

erfüllt, so ist das m-Schrittverfahren konsistent von der Ordnung p.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Zeigen Sie: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es (bis auf Normierung) genau ein m-schrittiges lineares Verfahren

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_j u_{\ell+j} = h \sum_{j=0}^{m} \beta_j f(t_{\ell+j}, u_{\ell+j}), \qquad \ell = 0, \dots, n-m,$$

mit der Konsistenzordnung $2m$, aber keines mit der Konsistenzordnung $2m+1$.

Hinweis: Verwenden Sie das Lemma aus Aufgabe 4 und schreiben Sie die dort angegebene Bedingung in der Form

$$M \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = 0$$

mit einer passenden Matrix M.