Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 4

Abgabe am 2. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (3 + 3 = 6 Punkte)

Seien $\varphi : \mathbb{R}^{n_y} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R}^{n_u} \longrightarrow \mathbb{R}$ nach unten beschränkt und stetig differenzierbar sowie $A \in \mathbb{R}^{m \times n_y}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n_u}$ und $a, b \in \mathbb{R}^{n_u}$ mit $a \leq b$ und $c \in \mathbb{R}^{n_y}$. Außerdem sei mindestens eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(i) φ ist koerziv, d.h. $\lim_{\|y\|_2 \to \infty} \varphi(y) = +\infty$. **(ii)** $m = n_y$ und A ist invertierbar

Wir betrachten folgendes Optimierungsproblem in der Variablen $x = (y, u) \in \mathbb{R}^{n_y + n_u}$:

$$\left.\begin{aligned} &\min_{x=(y,u)} f(x) := \varphi(y) + \psi(u) \\ \text{sodass} \quad & Ay - Bu = 0 \\ & a - u \leq 0, \quad u - b \leq 0, \quad y - c \leq 0 \end{aligned}\right\} \tag{P}$$

Wir nehmen an, dass es mindestens einen zulässigen Punkt gibt.

a) Begründen Sie unter diesen Voraussetzungen die Existenz eines Minimierers $\bar{x} = (\bar{y}, \bar{u})$ und dass dieser die KKT-Bedingungen erfüllt. Geben Sie eine Zusatzbedingung an f an, die die Eindeutigkeit des Minimierers sicherstellt.

b) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für (P).

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Beweisen Sie die folgende *hinreichende Optimalitätsbedingung erster Ordnung*:
Erfüllt $\bar{x} \in M$ die Bedingung

$$f'(\bar{x})h > 0 \qquad \text{für alle} \quad h \in T(M, \bar{x}) \setminus \{0\},$$

dann ist $\bar{x}$ ein lokales Minimum von f über M und es gibt $\epsilon, \delta > 0$, sodass die Wachstumsbedingung

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \delta \|x - \bar{x}\|_2$$

für alle $x \in M$, $\|x - \bar{x}\|_2 \leq \epsilon$ gilt.

Hinweis: Widerspruchsbeweis.

Aufgabe 3. (2 + 1 + 1 = 4 Punkte)

Für $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sowie $\Delta \geq 0$, $\alpha \geq 0$ betrachten wir die folgenden zwei Optimierungsprobleme:

$$\min f(x) \qquad \text{sodass } \|x\|_2 \leq \Delta \tag{TR$_\Delta$}$$

bzw.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F_\alpha(x) := f(x) + \alpha \|x\|_2^2. \tag{P$_\alpha$}$$

a) Beweisen Sie: Ist $\bar{x}_\alpha$ Lösung von (P$_\alpha$), dann existiert ein $\Delta \geq 0$, sodass $\bar{x}_\alpha$ Lösung von (TR$_\Delta$) ist.

b) Beweisen Sie: Ist $\bar{x}_\Delta$ ein KKT-Punkt von (TR$_\Delta$), dann existiert $\alpha \geq 0$, sodass $\bar{x}_\Delta$ ein stationärer Punkt von (P$_\alpha$) ist, d.h. es gilt $\nabla F_\alpha(\bar{x}_\Delta) = 0$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass eine Lösung $\bar{x}_\Delta$ von (TR$_\Delta$), $\Delta > 0$, im Allgemeinen nicht Lösung eines Problems (P$_\alpha$) mit einem $\alpha \geq 0$ sein muss.

Aufgabe 4. (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

a) Sei $X := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ ein durch eine differenzierbare Funktion $g = (g_1, ..., g_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definierter zulässiger Bereich. Ein Punkt $x^* \in X$ erfüllt die sog. *linearisierte Slater-Bedingung* wenn es ein $x \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$g(x^*) + g'(x^*)(x - x^*) < 0.^1$$

Zeigen Sie, dass x^* die Abadie CQ erfüllt, wenn x^* der linearisierten Slater-Bedingung genügt.

Bemerkung: Im Gegensatz zur Slater-Bedingung benötigt die linearisierte Slater-Bedingung keine Konvexität. Im Gegenzug bezieht sich die linearisierte Slater-Bedingung stets auf einen Punkt, während die Slater-Bedingung für alle zulässigen Punkte Regularität impliziert.

b) Sei die Funktion $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$c(x) := \begin{cases} (x-1)^2 & \text{für} \quad x > 1 \\ 0 & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ (x+1)^2 & \text{für} \quad x < -1 \end{cases}.$$

Wir definieren $g_1(x) := c(x_1) - x_2$, $g_2(x) := c(x_1) + x_2$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie dass die durch die (konvexen) Bedingungen $g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0$ in $\mathbb{R}^2$ gegebene Menge im Punkt $x^* = (0,0)^T$ der Abadie CG genügt, nicht aber der Slater Bedingung.

c) Eine zulässige Menge $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die Ungleichungen

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 2, \qquad (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 2, \qquad x_1 \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass in $x^* = (0,0)^T$ die Mangasarian-Fromowitz CQ, nicht aber die Linear Indipendence CQ erfüllt ist.

[1] "< 0" steht hier für "< 0" in jeder Komponente eines Vektors auf $\mathbb{R}^m$.