Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 5

Abgabe am 9. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (2 + 3 = 5 Punkte)

Seien

$$J : \mathbb{R}^{n_y+n_u} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x = (y, u) \longmapsto J(y, u)$$

und

$$h : \mathbb{R}^{n_y+n_u} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_y}, \qquad x = (y, u) \longmapsto h(y, u)$$

stetig differenzierbar, derart, dass $h_y(x) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n_y+n_u}$ invertierbar ist.

a) Stellen Sie das KKT-System für die Optimierungsaufgabe

$$\min_{y,u} J(y, u) \qquad \text{sodass} \quad h(y, u) = 0$$

auf und begründen Sie, dass das Erfülltsein der KKT-Bedingung tatsächlich ein notwendiges Optimalitätskriterium ist.

b) Wir nehmen nun an, dass es zu jedem $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ genau ein $y = y(u) \in \mathbb{R}^{n_y}$ gibt, das die Gleichungsnebenbedingung $h(y(u), u) = 0$ löst. Berechnen Sie unter dieser Zusatzannahme mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen die Ableitung des sog. *reduzierten Funktionals*

$$j : \mathbb{R}^{n_u} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad u \longmapsto J(y(u), u).$$

Drücken Sie die Ableitung $j'(\bar{u})$ in einem Minimierer $(\bar{y}, \bar{u})$ mit Hilfe des zugehörigen Lagrange-Multiplikators aus Teilaufgabe a) aus.

Aufgabe 2. (2 + 1 = 3 Punkte)

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^2 + (y-1)^2 \qquad \text{sodass} \quad x^2 - y = 0,$$

d.h. gesucht ist derjenige Punkt (x, y) auf der Normalparabel, der minimalen Abstand zum Punkt $(0, 1)$ hat.

a) Lösen Sie das Optimierungsproblem, indem Sie die Nebenbedingung einmal nach $x = x(y)$ und einmal nach $y = y(x)$ auflösen und so jeweils ein unrestringiertes Problem (in x bzw. y) erhalten. Was fällt auf?

b) Prüfen Sie die Anwendbarkeit der KKT-Bedingung und lösen Sie das Optimierungsproblem mit Hilfe des KKT-Systems.

Aufgabe 3. (3 + 4 = 7 Punkte)

a) Berechnen Sie für beliebiges $y \in \mathbb{R}^2$ die Projektion $P_C(y)$ auf die Menge

$$C := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Nutzen Sie dazu die KKT-Bedingungen für das zugehörige Optimierungsproblem. Prüfen Sie vorher deren Anwendbarkeit.

b) Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3} \; & x_3 - \frac{1}{2}x_1^2 \\ -x_3 - x_2 - x_1^2 &\leq 0 \\ -x_3 + x_2 - x_1^2 &\leq 0 \\ -x_3 &\leq 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $x^* = (0,0,0)^T$ zusammen mit einem geeigneten Lagrange-Multipliaktor die KKT-Bedingungen erfüllt. Welche Constraint Qualification (ACQ, GCG, MFCQ, PLICQ, LICQ) gilt in x^*?

Ist x^* auch eine Lösung des Optimierungsproblems?

Aufgabe 4. (4 + 1 = 5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar für $i = 1, ..., n$. Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) := \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \\ \text{sodass} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, ..., n). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass für eine Lösung $\bar{x}$ dieses Optimierungsproblems gilt: Es existiert $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\left.\begin{aligned} f_i'(\bar{x}_i) &\geq \alpha, \\ (f_i'(\bar{x}_i) - \alpha)\bar{x}_i &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (\star)$$

b) Geben Sie eine Bedingung an die f_i an, unter denen $(\star)$ bereits hinreichend dafür ist, dass $\bar{x}$ lokales Minimum ist.

Programmieraufgabe 1. (20 Punkte)

Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{sodass} \quad & g(x) \leq 0, \\ & h(x) = 0, \end{aligned} \tag{P}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
In dieser Aufgabe wollen wir das sog. *Quadratische Penalty-Verfahren* implementieren und an einigen (einfachen) Beispielen testen:

Input: Anfänglicher Penalty-Parameter $\alpha_0 > 0$, Vergrößerungsfaktor $\beta > 1$ für den Penaltyparameter, Toleranz $\epsilon > 0$ für die Verletzung der Nebenbedingungen
Output: Näherung $x \in \mathbb{R}^n$ für die Lösung des Optimierungsproblems (P)

1 $\alpha \longleftarrow \alpha_0$;
2 $x \longleftarrow \text{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} P_\alpha(x) := f(x) + \frac{\alpha}{2}\|\max(0, g(x))\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|h(x)\|_2^2$;
3 **if** $\|\max(0, g(x))\|_2^2 + \|h(x)\|_2^2 < \epsilon$ **then**
4 | Stop and return x;
5 **end**
6 $\alpha \longleftarrow \beta\alpha$;
7 Go to line 2;

Hinweis: $\max(0, g(x)) \in \mathbb{R}^m$ steht für den Vektor mit den Einträgen $\max(0, g_i(x))$, $i = 1, ..., m$, d.h. $\max(0, \cdot)$ angewandt auf Vektoren ist komponentenweise zu verstehen.

Die Idee des Algorithmus ist Folgende: Das restringierte Optimierungsproblem (P) wird durch die unrestringierten Probleme in Zeile 2 approximiert, indem auf das ursprüngliche Zielfunktional f “Strafterme” addiert werden, die die Verletzung der Nebenbedingungen “bestrafen”. Die unrestringierten Probleme müssen natürlich in der Regel iterativ, z.B. mit dem Gradientenverfahren, gelöst werden.

Abgabe der Programmieraufgabe in der Woche 13. bis 17. Mai