



Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe



Übungsblatt 6

Abgabe am 16. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 1.

(3 + 2 = 5 Punkte)

Formulieren Sie *explizit* die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung für die folgenden Optimierungsprobleme:

- a) Optimierungsproblem aus Aufgabe 1 von Übungsblatt 4: φ und ψ sind nun als zweimal stetig differenzierbar angenommen.

b)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{sodass} \quad \|x\|_2 \leq \Delta$$

mit einem Radius $\Delta > 0$ und einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.

(3 + 4 = 7 Punkte)

- a) Begründen Sie für das folgende Optimierungsproblem die Existenz einer Lösung:

$$\begin{aligned} \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \quad & (x-2) + (y-1)^2 \\ & x^2 - y \leq 0 \\ & x + y - 2 \leq 0 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie anschließend eine Lösung, indem Sie notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen untersuchen. Ist die Lösung eindeutig?

- b) Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Begründen Sie, dass das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & b^T x \\ & x^T Q x \leq 1 \end{aligned}$$

eine Lösung besitzt und bestimmen Sie eine solche Lösung, indem Sie notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen untersuchen. Ist diese Lösung eindeutig?

Leiten Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses die Ungleichung

$$(b^T x)^2 \leq (x^T Q x)(b^T Q^{-1} b)$$

her.

Aufgabe 3.

(5 + 3 = 8 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\bar{x} \in M$ ein Punkt, der die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung erfüllt, d.h.

$$f'(\bar{x})d \geq 0 \quad \text{für alle } d \in T(M, \bar{x}).$$

Wir definieren den Kegel kritischer Richtungen in $\bar{x}$ als

$$C_{\bar{x}} := \{d \in T(M, \bar{x}) : f'(\bar{x})d = 0\}.$$

a) Zeigen Sie folgende *hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung*:

Gilt $f''(\bar{x})d^2 > 0$ für alle $d \in C_{\bar{x}} \setminus \{0\}$, dann gibt es $\varepsilon, \delta > 0$, sodass

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \frac{\delta}{2} \|x - \bar{x}\|_2^2$$

für alle $x \in M$ mit $\|x - \bar{x}\|_2 \leq \varepsilon$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie eine ähnliche Technik wie für Aufgabe 2 von Blatt 4.

b) Geben Sie ein Beispiel für M, f und $\bar{x}$ an, derart, dass $\bar{x}$ die hinreichende Optimalitätsbedingung aus Teilaufgabe a) erfüllt ist, jedoch die stärkere Bedingung

$$f''(\bar{x})d^2 > 0 \quad \text{für alle } d \in T(C, \bar{x})$$

nicht gilt.