Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2020
Prof. Dr. Jochen Garcke
Christopher Kacwin

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 1.

Abgabe am **Dienstag, 5.5.20 bis 10:00 Uhr**.

Aufgabe 1. (Konvexer Abschluss)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass $conv(M)$ bzw. $cone(M)$ gleich dem Durchschnitt aller konvexen Mengen bzw. aller konvexen Kegel ist, die M enthalten.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Satz von Caratheodory)

Für $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^d$ ist $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ eine Konvexkombination, wenn $\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i = 1$ und $\lambda_i \geq 0$. Zeigen Sie den Satz von Caratheodory: *Die konvexe Hülle einer Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ ist die Menge aller Konvexkombinationen von höchstens $d+1$–elementigen Teilmengen von M.*

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Lemma 1.7)

Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ eine konvexe Menge. Zeigen Sie Lemma 1.7 aus der Vorlesung: *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex über D, wenn für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ und beliebige $x_1, \ldots, x_m \in D$ und beliebige $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ gilt*

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)\,.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Neumann-Reihe)

Sei $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $\|M\| < 1$. Zeigen Sie

$$(I_d - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} M^k\,.$$

(5 Punkte)