Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2020
Prof. Dr. Jochen Garcke
Christopher Kacwin

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 3.

Abgabe am **Dienstag, 19.5.20 bis 10:00 Uhr**.

Aufgabe 1. (Suchrichtung für Newton-artige Verfahren)

Für Newton-artige Verfahren werden die Suchrichtungen s^k mit folgender Vorschrift berechnet:

$$M_k s^k = -\nabla F(x^k)\,.$$

Hierbei sind $M_k \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch positiv definite Matrizen. Angenommen, es existieren $0 < \mu_1 < \mu_2$ sodass $\mu_1 \leq \lambda_{min}(M_k) \leq \lambda_{max}(M_k) \leq \mu_2$ für alle k gilt. Zeigen Sie, dass die Suchrichtungsfolge $\{s^k\}$ zulässig ist und die Winkelbedingung erfüllt.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Unzulässige Schrittweite mit der Armijo-Regel)

Die Armijo-Bedingung alleine liefert nicht immer zulässige Schrittweiten, selbst wenn die Suchrichtungen zulässig sind. Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und die Suchrichtungen $s^k = -2^{-k}\nabla F(x^k)$. Zeigen Sie, dass

a) die $\{s^k\}$ zulässige Suchrichtungen sind und

b) dass für $F(x) = x^2/4$ mit dem Startpunkt $x_0 > 0$ und $\gamma \leq 3/4$ immer $\sigma_k = 1$ gewählt wird. Zeigen Sie, dass diese Schrittweitenwahl unzulässig ist.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k+1}(1-\frac{1}{2^{i+1}})$ existiert und der Grenzwert $\alpha > 0$ ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite)

Wir betrachten das Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite $\sigma_k = \sigma > 0$.

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \|x\|^{3/2}$. Zeigen sie, dass f nicht Lipschitz-stetig ist. Zeigen Sie ausserdem, dass das Gradientenverfahren angewendet auf f entweder nach endlich vielen Schritten terminiert oder nicht konvergiert.

b) Sei nun $f(x) = \|x\|^{2+\beta}$ mit $\beta > 0$. Geben Sie Bedingungen für die Schrittweite σ und den Startwert x_0 an, für die das Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite konvergiert.

(5 Punkte)