# Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2020
Prof. Dr. Jochen Garcke
Christopher Kacwin

UNIVERSITÄT BONN

## Übungsblatt 4.

Abgabe am **Dienstag, 26.5.20 bis 10:00 Uhr**.

**Aufgabe 1.** (Stochastischer Koordinatenabstieg)

Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$w^* = \underset{w \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \,(f(w))$$

mit $f(w) = \frac{1}{2} w^\top A w - w^\top b$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch positiv definit und $b \in \mathbb{R}^d$.

a) Es sei $e_i \in \mathbb{R}$ der $i$-te Einheitsvektor. Zeigen Sie:

$$\frac{\partial f}{\partial w_i}(w) = e_i^\top A(w - w^*)$$

Wir betrachten die Iterationsfolge

$$w^{k+1} = w^k - \alpha_i \frac{\partial f}{\partial w_i}(w^k) e_i \,,$$

wobei $\alpha_i = 1/A_{ii}$ und $i$ in jedem Schritt zufällig aus $\{1, \dots, d\}$ gezogen wird, verteilt nach den Gewichten $i \sim A_{ii}/\operatorname{Tr}(A)$. Definiere $\|w\|_A^2 = w^\top A w$.

b) Zeigen Sie, dass mit $\Pi_i = \frac{e_i e_i^\top A}{A_{ii}}$ gilt:

$$\|w^{k+1} - w^*\|_A^2 = \|(I_d - \Pi_i)(w^k - w^*)\|_A^2$$

c) Definiere $r^k = A^{1/2}(w^k - w^*)$. Zeigen Sie:

$$\|r^{k+1}\|_2^2 = \|r^k\|_2^2 - (r^k)^\top \frac{A^{1/2} e_i e_i^\top A^{1/2}}{A_{ii}} r^k$$

d) Zeigen Sie schliesslich, dass die Iterationsfolge konvergiert:

$$\mathbb{E}\left[\|w^{k+1} - w^*\|_A^2\right] \leq \left(1 - \frac{\lambda_{min}(A)}{\operatorname{Tr}(A)}\right) \mathbb{E}\left[\|w^k - w^*\|_A^2\right]$$

(10 Punkte)

**Aufgabe 2.** (Kegel)

Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ ein Kegel und $K^p = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in K \colon x^\top y \leq 0\}$ der polare Kegel zu $K$. Zeigen Sie:

a) $K$ ist konvex genau dann, wenn $K + K = \{x + x' \mid x, x' \in K\} \subset K$.

b) $K^p$ ist konvex und abgeschlossen.

c) Falls $K$ konvex und abgeschlossen ist, so gilt $(K^p)^p = K$.

Hinweis: sie dürfen benutzen, dass für konvexe, abgeschlossene Mengen $C$ der Projektionsoperator $P_C(y) = \operatorname{argmin}_{x \in C} \|x - y\|_2^2$ existiert und eindeutig ist.

(5 Punkte)

**Programmieraufgabe 1.** (Stochastischer Koordinatenabstieg)

a) Implementieren Sie die Iterationsfolge aus Aufgabe 1. Schreiben sie eine Routine, die als Eingabe eine symmetrisch positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^d$, einen Startvektor $w^0 \in \mathbb{R}^d$ sowie ein Iterationslimit $k$ erhält und als Ausgabe die Folge $w^1, \dots, w^k$ erzeugt.

b) Erzeugen Sie 200 Zufallszahlen $x_1, \dots, x_{200}$, unabhängig identisch gleichverteilt auf $[0, 1]$. Wir betrachten die sogenannte Kernfunktion

$$K(x, y) = \begin{cases} (1-y)x & x \le y \\ (1-x)y & y \le x \end{cases}$$

und integrierte Kernfunktion

$$B(x) = \int_0^1 K(x, y)dy = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}(1-x)x^2 - x^2 + \frac{1}{2}x\,.$$

Wir wollen lösen:

$$w^* = \operatorname*{argmin}_{w\in\mathbb{R}^{200}} \left( \sum_{i,j=1}^{200} w_i K(x_i, x_j) w_j - 2\sum_{i=1}^{200} w_i B(x_i) \right)\,.$$

Stellen Sie die zugehörige Matrix $A$ und Vektor $b$ zu diesem Problem auf und wenden Sie die Routine aus a) an. Visualisieren Sie die Punkte $\{(x_i, w_i^*)\}$. Was fällt auf?

(10 Punkte)

Die Programmieraufgabe kann bis zum 2.6.20 abgegeben werden. Es muss der Code, die ausführbare Datei und die Ausgabe in einer ersichtlichen Form beigelegt werden. Sie dürfen die Programmiersprache frei wählen, wir empfehlen allerdings Python oder C++.