



Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2020
Prof. Dr. Jochen Garcke
Christopher Kacwin



Übungsblatt 8.

Abgabe am **Dienstag, 23.6.20 bis 10:00 Uhr.**

Aufgabe 1. (Explizites und implizites Euler-Verfahren)

Das Anfangswertproblem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

soll mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren mit fester Schrittweite h gelöst werden. Bestimmen Sie jeweils explizit die Iterierten (y_1^k, y_2^k) und vergleichen Sie diese mit der exakten Lösung an der Stelle $t = k \cdot h$. Was stellen Sie fest?

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Heun-Verfahren)

Gegeben sei das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$. Beweisen Sie mithilfe der Taylor-Entwicklung, dass das Verfahren von Heun,

$$y^{(k+1)} := y^{(k)} + \frac{\tau_k}{2} \left(f(t_k, y^{(k)}) + f(t_{k+1}, y^{(k)} + \tau_k f(t_k, y^{(k)})) \right),$$

die Konsistenzordnung zwei hat, falls f genügend glatt ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Eulerverfahren für Anfangswertprobleme)

Für das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = t - t^3, \quad x(0) = 0.$$

sollen mit Hilfe des Euler-Verfahrens mit konstanter Schrittweite h Näherungswerte $y^{(k)}$ berechnet werden. Man gebe $x(t)$ und $y^{(k)}$ explizit an und zeige, dass an jeder Stelle $t = k \cdot h$ der Fehler für $h \rightarrow 0$ gegen Null konvergiert.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Stabilität von Fixpunkten)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'(t) = \lambda(1 - x(t)^2), \quad \lambda > 0 \quad \text{mit } x(0) = x_0.$$

- Zeigen Sie, dass diese Differenzialgleichung einen stabilen Fixpunkt bei $x_s = 1$ und einen instabilen Fixpunkt bei $x_i = -1$ hat.
- Zeigen Sie, dass das implizite Euler-Verfahren angewendet auf diese Gleichung zunächst 2 mögliche Lösungen für den ersten Schritt liefert. Zeigen Sie zudem, dass eine der beiden Lösungen für genügend kleine Schrittweiten nicht herangezogen werden kann.