Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2020
Prof. Dr. Jochen Garcke
Christopher Kacwin

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 10.

Abgabe am **Dienstag, 7.7.20 bis 10:00 Uhr**.

Aufgabe 1. (Lipschitz-Bedingung für die Verfahrensfunktion)

Wir betrachten ein explizites Runge-Kutta Verfahren der Stufe p. Zeigen Sie, dass die Lipschitz-Bedingung an f

$$\exists L > 0 : \forall t \in [0,T], v, w \in \mathbb{R}^d : \|f(t,v) - f(t,w)\| \leq L\|v - w\|$$

die Lipschitz-Bedingung an die Verfahrensfunktion ϕ

$$\exists \Omega > 0 \forall t \in [0,T], v, w \in \mathbb{R}^d : \|\phi(t,v,\tau) - \phi(t,w,\tau)\| \leq \Omega\|v - w\|$$

impliziert.
Bonus: Zeigen Sie die Aussage für allgemeine Runge-Kutta Verfahren für genügend kleine Schrittweiten τ.

(5+5 Punkte)

Aufgabe 2. (Mehrschrittverfahren)

Im Gegensatz zu Einschrittverfahren nutzen Mehrschrittverfahren nicht nur die Werte eines einzigen, sondern mehrerer vorheriger Stützpunkte. Da im ersten Schritt jedoch i.a. nur der Wert eines Stützpunktes vorhanden ist, benötigt man zur Initialisierung noch ein Einschrittverfahren.
Betrachten Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(t) - 2u(t) = 1 \quad \text{mit} \quad u(0) = 1,\ u'(0) = 0.$$

Sie soll mit dem expliziten 3-Schritt-Verfahren

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \frac{h}{12}\Big(23f(t_k, u_k) - 16f(t_{k-1}, u_{k-1}) + 5f(t_{k-2}, u_{k-2})\Big)$$

und der festen Schrittweite $h = 1$ gelöst werden. Führen Sie eine Startrechnung mit dem expliziten Euler-Verfahren durch und berechnen Sie anschließend den ersten Schritt des 3-Schritt-Verfahrens.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Richardson-Extrapolation)

Sei $\tilde{x}(t_{k+1})$ die exakte Lösung des AWP mit Startwert $x(t_k) = y^{(k)}$. Zeigen Sie, dass mit

$$\hat{y}^{(k+1)} = \hat{y} + \frac{\tau_k}{2}\phi\left(t_k + \frac{\tau_k}{2}, \hat{y}, \frac{\tau_k}{2}\right)$$

und

$$\hat{y} = y^{(k)} + \frac{\tau_k}{2}\phi\left(t_k, y^{(k)}, \frac{\tau_k}{2}\right)$$

die Abschätzung für ein RK-Verfahren p-ter Ordnung

$$\tilde{x}(t_{k+1}) - y^{(k+1)} = \tau_k^{p+1} c(t_k, y^{(k)}) + \mathcal{O}(\tau_k^{p+2})$$

und

$$\tilde{x}(t_{k+1}) - \hat{y}^{(k+1)} = 2 \left(\frac{\tau_k}{2} \right)^{p+1} c(\tau_k, y^{(k)}) + \mathcal{O}(\tau_k^{p+2})$$

gilt.

(5 Punkte)