



# Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2020  
Prof. Dr. Jochen Garcke  
Christopher Kacwin



## Übungsblatt 12.

Abgabe am -.

### Aufgabe 1. (Konvexes Optimierungsproblem)

Es sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  nichtleer, abgeschlossen und konvex. Zudem sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare, konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass  $x^* \in X$  genau dann die Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{x \in X} f(x)$$

ist, wenn für alle  $x \in X$

$$\nabla f(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0$$

gilt.

(0 Punkte)

### Aufgabe 2. (AM–GM)

Es sei  $c > 0$ . Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n x_i$$

mit Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n x_i &= c \\ -x_i &\leq 0, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie, dass die globale Lösung  $x^*$  dieses Minimierungsproblems nur strikt positive Einträge hat und die KKT-Bedingungen erfüllt. Bestimmen Sie anschließend  $x^*$ .
- b) Zeigen Sie: Für alle  $x \in (\mathbb{R}_+)^n$  gilt

$$\left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

(0 Punkte)

**Aufgabe 3.** (Numerische Behandlung)

Gegeben ist das generelle Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

mit Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_i(x) &\leq 0, & i = 1, \dots, k, \\ h_j(x) &= 0, & j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Erläutern Sie zwei in der Vorlesung behandelte Methoden zur Lösung dieses Problems. Geben Sie an, welche zusätzlichen Voraussetzungen jeweils erfüllt sein müssen.

(0 Punkte)

**Aufgabe 4.** (Runge-Kutta Verfahren)

Zeigen Sie, dass das klassische Runge-Kutta Verfahren

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y^{(n)}) \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y^{(n)} + (h/2)k_1) \\ k_3 &= f(t_n + h/2, y^{(n)} + (h/2)k_2) \\ k_4 &= f(t_n + h, y^{(n)} + hk_3) \end{aligned}$$

angewandt auf die Differenzialgleichung

$$\dot{y} = \lambda y, \quad \lambda \text{ konstant}$$

die Iteration

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} \left( 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24} \right)$$

liefert.

Ist das Verfahren stabil für kleines  $h$  aber großes  $|h\lambda|$ ?

(0 Punkte)