Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2022
Professor Dr. Carsten Burstedde
Tim Griesbach

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 1.

Abgabe am **Dienstag, 12.04.2022**.

Aufgabe 1. (Konvexe Mengen)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen bzw. Ihre Behauptung über konvexe Mengen.

(a) Ein konvexer Kegel ist ein Kegel und eine konvexe Menge.

(b) Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist wieder eine konvexe Menge.

(c) Die Menge $\operatorname{conv}(M)$ ist der Durchschnitt aller M enthaltenden konvexen Mengen und somit die kleinste konvexe Menge, die M enthält.

(d) Ist die Vereinigung zweier konvexen Mengen im Allgemeinen wieder konvex?

(0 Punkte)

Aufgabe 2. (Konvexe Kegel)

Eine nicht-leere Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann ein konvexer Kegel, wenn für beliebige $x_i \in K$, $\lambda_i \geq 0$ und für alle $m \geq 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in K.$$

(0 Punkte)

Aufgabe 3. (Konvexe Funktionen)

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ eine nicht-leere konvexe Menge. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex über D, wenn für alle $m \in \mathbb{N}$ sowie beliebige $x_1, \ldots, x_m \in D$ und beliebige $\lambda_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i). \tag{2}$$

(b) Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^d$ konvex und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Beweisen Sie: Ist $g : K \to I$ (strikt) konvex und $f : I \to \mathbb{R}$ (streng) monoton wachsend und konvex, dann ist die Komposition $f \circ g : K \to \mathbb{R}$ (strikt) konvex.

(c) Bleibt die Aussage in (b) richtig, wenn auf „monoton wachsend“ verzichtet wird?

(0 Punkte)