Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2022
Professor Dr. Carsten Burstedde
Tim Griesbach

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 11.

Abgabe am **Donnerstag, 30.06.2022**.

Aufgabe 1. (Stetige Abhängigkeit vom Startwert)

Sei f stetig und erfülle die sogenannte *einseitige Lipschitz-Bedingung*

$$\big(f(t,y) - f(t,z)\big)^T (y - z) \leq l \, \|y - z\|_2^2$$

für alle (t,y), $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ und ein $l \in \mathbb{R}$. Ferner seien $y, z\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der Anfangswertprobleme $y' = f(t,y)$ mit $y(0) = y_0$ bzw. $z' = f(t,z)$ mit $z(0) = z_0$ mit Vorgaben $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie für $x(t) := \|y(t) - z(t)\|_2^2$ und ein beliebiges Intervall $(a,b) \subseteq (0,T)$ mit $x(t) \neq 0$ für $t \in (a,b)$ die Beziehung

$$\frac{x'(t)}{x(t)} \leq 2l.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\|y(t) - z(t)\|_2 \leq e^{lt} \, \|y_0 - z_0\|_2 \qquad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Damit hängt $y' = f(t,y)$ stetig von den Anfangsdaten ab.

Hinweis: Betrachten Sie $\int \frac{d}{dt} \log x(t) \, dt$ über geeigneten Integrationsgrenzen.

(2 + 4 = 6 Punkte)

Aufgabe 2. (Heun-Verfahren)

Gegeben sei das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$. Beweisen Sie mithilfe der Taylor-Entwicklung, dass das Verfahren von Heun,

$$y^{(k+1)} := y^{(k)} + \frac{\tau_k}{2}\Big(f(t_k, y^{(k)}) + f\big(t_{k+1}, y^{(k)} + \tau_k f(t_k, y^{(k)})\big)\Big),$$

die Konsistenzordnung zwei hat, falls f genügend glatt ist.

(6 Punkte)

Programmieraufgabe 3. (Explizites Runge-Kutta-Verfahren)

Seien $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und $u_0 \in \mathbb{R}^d$. Implementieren Sie das explizite Runge-Kutta-Verfahren zu der autonomen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = F(u(t)), \quad u(0) = u_0$$

auf einer Menge von Zeitschritten $t_k = \tau k$ für $0 \leq k \leq m$ sowie $m \in \mathbb{N}$ und $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$. Hierbei sollen τ und m Parameter der von Ihnen implementierten Funktion sein. Die Evaluation von $F(u)$ soll durch einen Funktionenzeiger, der ebenfalls ein Parameter

Ihrer Funktion ist, realisiert werden. Hierbei soll auch die Parametrisierung in $d \in \mathbb{N}$ berücksichtigt werden.

Testen Sie Ihre Implementierung mithilfe des zweidimensionalen Anfangswertproblems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} 3u_1 - 2u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

und des explizite Euler-Verfahrens sowie dem Heunschen Verfahren dritter Ordnung wie unten angegeben. Die analytische Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$u(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}.$$

Plotten Sie mit Gnuplot oder einem anderen Werkzeug Ihrer Wahl die Graphen der numerischen Lösungen und testen Sie den Einfluss von τ auf den Diskretisierungsfehler $\max_{j \in \{1,\dots,m\}} ||u(t_j) - u^j||$ und die Rechenzeit Ihrer Implementierung, wobei $m \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Zeitschritte und u^j die j-te Iterierte Ihrer Implementierung des Runge-Kutta-Verfahrens ist und der Diskretisierungsfehler von Ihrem Programm ausgegeben wird.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Die Programmieraufgabe kann bis zum **30.06.2022** im PC-Pool des Nebengebäudes des Mathematikzentrums abgegeben werden. Bitte vereinbaren Sie mit Ihrer Tutorin bzw. Ihrem Tutor für die Abgabe der Programmieraufgabe einen Termin innerhalb des oben genannten Zeitrahmens Die Sprache der Programmieraufgaben ist C oder auch C++, solange der mathematische Kern C-kompatibel bleibt. Die Lösungen müssen auf den Computern des PC-Pools präsentiert werden.