Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2022
Professor Dr. Carsten Burstedde
Tim Griesbach

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 12. **keine Abgabe**

Aufgabe 1. (Butcher-Tableau)

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten folgende Anfangswertaufgabe

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Durch das folgende Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & 0 \end{array}$$

wird ein explizites Runge-Kutta-Verfahren definiert von dem wir ferner fordern, dass es invariant unter Autonomisierung ist. Bestimmen Sie b_1 und b_2 in Abhängigkeit von c_2 so, dass das Verfahren die Konsistenzordnung $p = 2$ besitzt.

(0 Punkte)

Aufgabe 2. (Stabilitätsfunktionen)

Es sei die Anfangswertaufgabe $\dot{y} = \lambda y$, $y(0) = y_0$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben. Ferner sei für alle folgenden Runge-Kutta-Verfahren die Schrittweite $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$. Des Weiteren seien die folgenden Runge-Kutta-Verfahren gegeben

$$\text{i)} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \qquad \text{ii)} \quad \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ 1/2 & \frac{1}{2} & 0 & & \\ 1/2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array} \qquad \text{iii)} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array},$$

wobei i) das Heunsche Verfahren zweiter Ordnung, ii) das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung und iii) die implizite Trapezregel ist.

(a) Bestimmen Sie für das Heunsche Verfahren zweiter Ordnung und das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung das Polynom $P(z)$ mit

$$y_{k+1} = P(\tau\lambda) y_k.$$

(b) Bestimmen Sie für die implizite Trapezregel die rationale Funktion $R(z)$ mit

$$y_{k+1} = R(\tau\lambda) y_k.$$

(0 Punkte)

Aufgabe 3. (Optimierung und Konvexität)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 + 2x_2 + 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Funktion konvex auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Menge der globalen Minima von f.

(c) Geben Sie eine zusammenhängende Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ an, eingeschränkt auf welche die Funktion f mehr als ein globales Minimum besitzt.

(0 Punkte)

Aufgabe 4. (Quasi-Newton-Verfahren)

Wir betrachten das Quasi-Newton-Verfahren mit der *Davidon-Fletcher-Powell*-Aufdatierungsformel:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(y_k - H_k d_k) y_k^\top + y_k (y_k - H_k d_k)^\top}{y_k^\top d_k} - \frac{(y_k - H_k d_k)^\top d_k}{(y_k^\top d_k)^2} y_k y_k^\top,$$

wobei $d_k := x_{k+1} - x_k$ und $y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$.

Rechnen Sie nach, dass die Matrix H_{k+1} symmetrisch ist, sofern H_k symmetrisch ist, sowie dass die Quasi-Newton-Gleichung für alle k erfüllt ist.

(0 Punkte)