Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2022
Professor Dr. Carsten Burstedde
Tim Griesbach

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 13.

keine Abgabe

Aufgabe 1. (Dividierte Differenzen und Interpolation)

(a) Es sei die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

gegeben. Bestimmen Sie das Hermitsche Interpolationspolynom von f für vorgegebene Funktionswerte und Werte der ersten Ableitung von f in $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Demonstrieren Sie hierbei die Berechnung der dividierten Differenzen in einer Tabelle.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = x^n$ und $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Stützstellen. Zeigen, dass für die dividierte Differenz $g[x_0, \dots, x_n] = 1$ gilt.

(0 Punkte)

Aufgabe 2. (B-Splines)

Zu gegebenen Knoten $t_i = i \in \mathbb{Z}$ seien $B_{i,r}$ die zugehörigen B-Splines. Zeigen Sie

(a) $B_{i+1,k}(x) = B_{i,k}(x-1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

(b) $B_{i,r}(x) = \int_{x-1}^{x} B_{i,r-1}(s)\, \mathrm{d}s$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(0 Punkte)

Aufgabe 3. (Newton-Verfahren)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $I = (-M, M) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $M \in \mathbb{R}_{>0}$. Ferner sei $x^* \in I$ mit $f(x^*) = 0$. Es gelte $f'(x) > 0$ für alle $x \in [-M, M]$.

(a) Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $x^{(k)} \in I$ gilt

$$x^{(k+1)} - x^* = \frac{1}{f'(x^{(k)})} \int_{x^{(k)}}^{x^*} \left(f'(y) - f'(x^{(k)}) \right) \, \mathrm{d}y.$$

(b) Folgern Sie, dass falls ein $L \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$|f'(y) - f'(x)| \leq L|y - x| \quad \text{für alle } x, y \in I$$

existiert, dann konvergiert die Iterationsfolge $x^{(k)}$ für $x^{(0)}$ nahe x^* quadratische gegen x^*.

(c) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass das Newton-Verfahren im Allgemeinen nicht global konvergiert.

(0 Punkte)

Aufgabe 4. (Runge-Kutta-Verfahren)

Betrachten Sie das Runge-Kutta-Verfahren, das durch das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

gegeben ist und rechnen Sie nach, dass das Verfahren die Differentialgleichung

$$x'(t) = 2at$$

für $a \in \mathbb{R}$ exakt löst, und zwar für alle Zeitschritte und Anfangswerte/-zeiten.

(0 Punkte)