Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2022
Professor Dr. Carsten Burstedde
Tim Griesbach

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 2.

Abgabe am **Donnerstag, 21.04.2022**.

Organisatorisches. Da die Abgabe des Blatts erst nächste Woche Donnerstag ist, sind die ersten beiden Aufgaben dieses Blatts Präsenzaufgaben für die Tutorien in der nächsten Woche, das heißt die Woche des 21.04.2022.
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis 10 Uhr am Donnerstag in der Vorlesung ab oder alternativ bis donnerstags 12 Uhr in der Friedrich-Hirzebruch-Allee 7 in der dritten Etage in der Ablage mit der Beschriftung „Prof. Burstedde Lehre", die sich über den Postfächern befindet.

Aufgabe 1. (Optimalitätsbedingungen)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $b \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax + b^\top x + c$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -8 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie einen stationären Punkt x^* von f über $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass dieser eindeutig ist sowie ein striktes globales Minimum von f ist.

(b) Ist für eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ein eindeutiger stationärer Punkt, der ein lokales Minimum ist, bereits ein globales Minimum?

(0 Punkte)

Aufgabe 2. (Mehrdimensionale Taylor-Entwicklung)

In dieser Aufgabe dürfen Sie die Integralform des Taylor-Restgliedes im Eindimensionalen

$$R_k(x) = \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} (x-y)^k f^{(k+1)}(y)\mathrm{d}y$$

für die Entwicklungsstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ und Taylor-Polynomgrad $k \in \mathbb{N}$ ohne Beweis verwenden, aber keine andere Ihnen möglicherweise aus vorherigen Vorlesungen bekannten Taylor-Restglieddarstellungen. Des Weiteren dürfen Sie verwenden, dass für die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = f(x_0 + th)$ für f wie in der Teilaufgabe a) und $h \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k g(t)}{\mathrm{d}t^k} = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^\alpha f(x_0+th)}{\alpha!} h^\alpha,$$

wobei die Multiindizes wie in der Teilaufgabe a) definiert sind.

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^{k+1}(\Omega, \mathbb{R})$, $x \in \Omega$ und $h \in \mathbb{R}^d$ mit $[x, x+h] \subset \Omega$, wobei $[x, x+h]$ die Menge aller Punkte auf der Verbindungsstrecke von x und $x+h$ ist.

Dann gilt

$$\exists \xi \in [x, x+h] : f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(\xi)}{\alpha!} h^\alpha,$$

wobei über Multiindizes summiert wird. Das heißt $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, $\alpha! = \prod_{i=1}^d \alpha_i!$, $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_d^{\alpha_d} f$ und $h^\alpha = \prod_{i=1}^d h_i^{\alpha_i}$.

(b) Zeigen Sie mithilfe der Teilaufgabe a), dass für $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und beliebige $x, y \in D$ gilt

$$\exists \sigma \in [0,1] : f(y) - f(x) = \nabla f(x)^T (y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^T \nabla^2 f(x + \sigma(y-x))(y-x).$$

Anmerkung: Es handelt sich hierbei um die Gleichung (1.2.20) aus der Vorlesung.

(0 Punkte)

Aufgabe 3. (Stützeigenschaft konvexer Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ eine offene konvexe Menge.

(a) Beweisen Sie, dass $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ genau dann gleichmäßig konvex über D ist, wenn gilt

$$\exists \mu > 0 \ \forall x, y \in D : f(y) \ge f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) + \mu ||x-y||_2^2.$$

(b) Beweisen Sie, dass die Funktion $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ genau dann gleichmäßig konvex über D ist, wenn die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x)$ für alle $x \in D$ gleichmäßig positiv definit ist, das heißt genau dann, wenn gilt

$$\exists \mu > 0 \ \forall x \in D \ \forall d \in \mathbb{R}^d : d^T \nabla^2 f(x) d \ge \mu ||d||^2.$$

(c) Beweisen Sie, dass im Allgemeinen eine auf D strikt konvexe Funktion $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ nicht eine auf D positiv definite Hesse-Matrix haben muss.

(3 + 3 + 2 Punkte)

Aufgabe 4. (Newton-Verfahren)

Das Newton-Verfahren ist durch die Iterationsvorschrift

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} - \left(F'\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right)\right)^{-1} F\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right), \ k \ge 0.$$

gegeben, wobei wir das Newton-Verfahren auf das System $F(x) = 0$, für $x \in D \subset \mathbb{R}^d$ offene Menge, anwenden.

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (x-1)y^2 &= 0, \\ x(x-2)(y+2) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung dieses Systems.

(b) Führen Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (1, 1)$ für den ersten Iterationsschritt durch.

(3 + 3 Punkte)