Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2022
Professor Dr. Carsten Burstedde
Tim Griesbach

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 7.

Abgabe am **Dienstag, 24.05.2022**.

Organisatorisches. Die Abgabe findet wegen des Feiertages am 26. Mai ausnahmsweise am Dienstag, den 24. Mai statt. Die Abgaben können bis 11:45 Uhr in der Vorlesung abgegeben werden.

Aufgabe 1. (Aitken-Algorithmus)

Wir führen für $P_{i,\dots,i+k}(x)$ aus der Vorlesung die abgekürzte Schreibweise $P_{i+k,k}(x)$ bzw. $P_{i+k,k}$ ein. Der zweite Index ist also die Stufe der Rekursion im Neville-Algorithmus und der erste Index der maximale Index unter den Stützstellen, die von dem Polynom interpoliert werden.

(a) Verwenden Sie die eingeführte Schreibweise, um zu zeigen, dass

$$P_{i,k} = P_{i,k-1} + \frac{(x-x_i)(P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1})}{x_i - x_{i-k}} = P_{i,k-1} + \frac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{\frac{x-x_{i-k}}{x-x_i} - 1}$$

gilt.

(b) Leiten Sie mithilfe der Teilaufgabe (a) eine Algorithmus her, der für $n+1 \in \mathbb{N}$ Stützstellen lediglich eine Speicherbedarf von $\mathcal{O}(n)$ Variablen aufweist.

(3 + 3 = 6 Punkte)

Aufgabe 2. (Newtonsche Interpolationsformel)

Geben Sie einen Algorithmus an, der die Newtonsche Interpolationsformel implementiert und nicht mehr als $n+1$ Variablen als Speicherbedarf benötigt, wobei $n+1 \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Stützstellen ist. Geben Sie auch einen Algorithmus für die Auswertung des Interpolationspolynoms mithilfe des Horner-Schemas an.
Hinweis: Mit der Formulierung „[...] nicht mehr als $n+1$ Variablen als Speicherbedarf benötigt [...]“ ist gemeint, dass im Rahmen der Ausführung des Algorithmus nur $n+1$ Variablen zur Speicherung verwendet werden. Die Eingabe des Algorithmus besteht aus den Stützpunkten, welche durch $2(n+1)$ Variablen dargestellt werden.

(6 Punkte)

Aufgabe 3. (Dividierte Differenzen)

Beweisen Sie mithilfe von Induktion nach r, dass

$$f[t_i, \dots, t_{i+r}] = \sum_{j=i}^{i+r} \alpha_j f^{(s_j-1)}(t_j) \quad \text{und} \quad \alpha_{i+r} \neq 0,$$

wobei s_j die Vielfachheit von t_j in $\{t_i \leq \ldots \leq t_j\}$ ist.

(6 Punkte)