Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2022
Professor Dr. Carsten Burstedde
Tim Griesbach

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 8.

Abgabe am **Donnerstag, 02.06.2022**.

Organisatorisches. Die Abgabe findet wegen der Online-Vorlesung am 2. Juni dieses Mal nur in der Ablage für die Abgaben in der dritten Etage der Friedrich-Hirzebruch-Allee 7 im Schrank unterhalb des rechten Druckers statt.

Aufgabe 1. (Eigenschaften der Bernstein-Polynome)

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Bernstein-Polynome.

(a) $x = 0$ ist i-fache Nullstelle von B_i^n und $x = 1$ ist $(n-i)$-fache Nullstelle von B_i^n

(b) $B_i^n(x) = B_{n-i}^n(1-x)$ (Symmetrie)

(c) $(1-x)B_0^n = B_0^{n+1}$, $xB_n^n = B_{n+1}^{n+1}$

(d) Die $\{B_i^n\}$ sind nicht-negativ auf $[0,1]$ und bilden eine Partition der Eins, das heißt

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) = 1.$$

(e) B_i^n hat über $[0,1]$ genau ein Maximum bei $x = \frac{i}{n}$.

(f) Die Bernstein-Polynome genügen der Rekursion

$$B_i^n(x) = xB_{i-1}^{n-1}(x) + (1-x)B_i^{n-1}(x).$$

(g) $\{B_i^n\}_{i=0}^n$ ist eine Basis für Π_n.

$(1+1+1+1+2+2+2 = 10$ Punkte$)$

Aufgabe 2. (Polynominterpolation)

In dieser Aufgabe wird die Notation für Interpolationspolynome aus der Vorlesung verwendet. Angenommen, dass $x_j = j$ für $j \in \{0,1,2,3\}$ und

$$P_{01}(x) = 2x+1, \quad P_{02}(x) = x+1 \quad \text{und} \quad P_{123}\left(\frac{5}{2}\right) = 3.$$

Bestimmen Sie $P_{0123}\left(\frac{5}{2}\right)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3. (Hermite-Interpolation)

Bestimmen Sie das Hermitsche Interpolationspolynom P für die Funktion f, gegeben durch $f(x) := \cos x$, unter Vorgabe der Funktionswerte und ersten Ableitungen an den Stellen $0, \frac{\pi}{2}$ und π. Demonstrieren Sie dabei die Vorberechnung des Schemas der dividierten Differenzen.

(6 Punkte)

Aufgabe 4. (Partition der Eins)

Es sei $\Omega \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ für $N \in \mathbb{N}$. Ferner seien Funktionen $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ mit $\operatorname{supp}(\varphi_i) \coloneqq \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : \varphi_i(x) \neq 0\}}$ als nicht-negative stetige Funktionen gegeben. Hierbei setzen wir voraus, dass $\Omega_i = \operatorname{int}(\operatorname{supp}(\varphi_i))$ gilt, wobei $\operatorname{int}(\cdot)$ das Innere der Menge ist. Konstruieren Sie mithilfe der φ_i Funktionen $\{\psi_i\}_{i=1}^N$, sodass diese eine Partition der Eins bilden, das heißt

$$\forall x \in \Omega : \sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) = 1 \quad \text{und} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} : \psi_i \geq 0,\ \operatorname{supp}(\psi_i) \subset \overline{\Omega}_i$$

sowie dass alle ψ_i stetig sind.

(0 Punkte)