Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2022
Professor Dr. Carsten Burstedde
Tim Griesbach

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 9.

Abgabe am **Donnerstag, 16.06.2022**.

Aufgabe 1. (Ableitungen der Bézierkurve I)

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung (2.4.4) aus der Vorlesung gilt. Das heißt

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}P(t) = \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{i=0}^{n-k}(\Delta^k b_i)B_i^{n-k}(t),$$

wobei $\Delta^0 b_i \coloneqq b_i$ und $\Delta^k b_i \coloneqq \Delta^{k-1}b_{i+1} - \Delta^{k-1}b_i$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung (2.4.10) aus der Vorlesung gilt, das heißt

$$\sum_{i=0}^{n-k}(\Delta^k b_i)B_i^{n-k}(t) = \Delta^k b_0^{n-k}(t).$$

(3 + 3 = 6 Punkte)

Aufgabe 2. (Integration der Bézierkurve)
Beweisen Sie, dass für die Bézierkurve $P(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)$ mit $b_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} b_i\right).$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3. (Leibnizregel für dividierte Differenzen)
Sei $t_i \leq \ldots \leq t_{i+k}$. Für hinreichend oft differenzierbare Funktionen g und h gilt

$$(gh)[t_i,\ldots,t_{i+k}] = \sum_{j=i}^{i+k} g[t_i,\ldots,t_j]h[t_j,\ldots,t_{i+k}].$$

Hinweis: Induktion oder Newtonsche Interpolationsformel.

(6 Punkte)

Programmieraufgabe 4. (B-Splines)

Das Ziel dieser Programmieraufgabe ist es, für B-Spline-Kurven $P(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i B_{i,r}(t)$, $P_i \in \mathbb{R}^d$, einen zum de-Casteljau-Algorithmus analogen Algorithmus zu implementieren.

(a) Stellen Sie einen Algorithmus für die Auswertung einer B-Spline-Kurve von gegebener Ordnung r auf. Um die B-Spline-Kurve für eine gegebene Stelle $x \in \mathbb{R}$ zu evaluieren, suchen Sie zuerst die relevanten Intervalle $x \in [t_k, t_{k+r})$. Die Knoten t_j sind monoton steigend geordnet und dürfen (bis zu r-mal) mehrfach vorkommen. Führen Sie hiervon ausgehend eine de-Casteljau-artige Rekursion durch.

(b) Verwenden Sie Ihre Implementierung, um eine B-Spline-Kurve zu $r = 4$ für die Kontrollpunkte

$$(P_i) = \left(0, 0, 2, 3, 0, 3, 2, \frac{7}{2}, 0\right) \tag{1}$$

sowie den Knotenvektor

$$(t_j) = \left(0, 0, 0, 0, 1, 2, \frac{5}{2}, 4, \frac{16}{3}, 6, 6, 6, 6\right) \tag{2}$$

zu berechnen und plotten Sie $P(t)$ über $[t_1 = x_0, x_m = t_{n+r}]$ mithilfe eines Werkzeugs Ihrer Wahl (z. B. gnuplot, python/matplotlib oder jupyter). Es bietet sich ggf. an, die entsprechenden Koordinaten mit Ihrem Programm in eine Datei zu schreiben und in einem separaten zweiten Schritt darstellen lassen.

(c) Verwenden Sie nun Ihre Implementierung mit den Kontrollpunkten

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Hierbei soll der Knotenvektor

$$(t_j) = \left(0, 0, 0, 0, \frac{9}{5}, 3, 3, \frac{13}{3}, 5, 5, 5, 5\right) \tag{4}$$

verwendet werden. Plotten Sie die B-Spline-Kurve im $\mathbb{R}^2$ analog zu dem in Teilaufgabe (b) beschriebenen Vorgehen.

(12 Punkte)

Die Programmieraufgabe kann bis zum 23.06.2022 im PC-Pool des Nebengebäudes des Mathematikzentrums abgegeben werden. Bitte vereinbaren Sie mit Ihrer Tutorin bzw. Ihrem Tutor für die Abgabe der Programmieraufgabe einen Termin innerhalb des oben genannten Zeitrahmens Die Sprache der Programmieraufgaben ist C oder auch C++, solange der mathematische Kern C-kompatibel bleibt. Die Lösungen müssen auf den Computern des PC-Pools präsentiert werden.