Repetitorium zur Ingenieur-Mathematik I, WS 2012/13

Aufgabe 1: Bestimmen Sie das quadratische Polynom, auf dessen Graph die Punkte $(-1, 4)$, $(0, 1)$, $(2, 7)$ liegen.

LÖSUNG:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$p(-1) = a - b + c = 4, \quad p(0) = c = 1, \quad p(2) = 4a + 2b + c = 7$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = 2x^2 - x + 1$$

Aufgabe 2:

a) Wann ist eine Folge *konvergent* (Definition)?

b) Definieren Sie den Begriff *Cauchy-Folge*.

c) Geben Sie zwei Beispiele für konvergente Folgen und deren jeweilige Grenzwerte an.

d) Geben Sie zwei Beispiele für divergente Folgen an.

LÖSUNG:

a) Siehe Skript.

b) Siehe Skript.

c) Z.B. konstante Folgen $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$, Nullfolgen wie $\frac{1}{n}$, andere direkt über Formeln angebbare Folgen wie z.B. $\frac{2n^2+n-3}{n^2-1}$, geometrische Reihe, Potenzreihen, etc.

d) Z.B. unbeschränkte Folgen wie $1, 2, 3, 4, \ldots$, Folgen mit mehreren (gegen unterschiedliche Grenzwerte) konvergenten Teilfolgen wie $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$.

Aufgabe 3: Skizzieren Sie den Graphen der folgenden Funktion, und schreiben Sie die Funktion unter Verwendung der Betragsfunktion ohne Fallunterscheidung:

$$f(x) := \begin{cases} -x & : \quad x < 0 \\ 0 & : \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -(x-2) & : \quad x > 2 \end{cases}$$

Tipp: Erinnern Sie sich dazu an die Funktion

$$p(x) = x + |x|.$$

LÖSUNG:

$$g(x) := \left\{ \begin{array}{rcl} -x & : & x < 0 \\ 0 & : & 0 \leq x \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\left(|x| - x\right)$$

$$h(x) := \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & : & x \leq 2 \\ 2 - x & : & x > 2 \end{array} \right\} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) - |1 - \frac{x}{2}|$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) + h(x) = \frac{1}{2}\left(|x| - x\right) + \left(1 - \frac{x}{2}\right) - |1 - \frac{x}{2}| = 1 - x + \frac{|x|}{2} - |1 - \frac{x}{2}|$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

LÖSUNG: Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ ist die Formel richtig:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \quad \checkmark.$$

Induktionsannahme (IAn): Die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n+1$
Beh.: Die Formel ist richtig für $n+1 \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\,.$$

Bew.:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{(IAn)}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)\cdot(n+2) \quad \checkmark.\end{aligned}$$

Also gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Aufgabe 5: Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n := \frac{3n^2+5n-2}{9n^2+3}$

b) $a_n := \frac{2n^3+3n+1}{4n^3+\sqrt{n}-3}$

LÖSUNG:

a)

$$a_n = \frac{3n^2+5n-2}{9n^2+3} = \frac{n^2\left(3+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(9+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{3+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}}{9+\frac{3}{n^2}} \to \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

für $n \to \infty$

b)

$$a_n = \frac{2n^3+3n+1}{4n^3+\sqrt{n}-3} = \frac{n^3\left(2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(4+\frac{1}{\sqrt{n}^5}-\frac{3}{n^3}\right)} = \frac{2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{4+\frac{1}{\sqrt{n}^5}-\frac{3}{n^3}} \to \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

für $n \to \infty$

Aufgabe 6: Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{4^{n+1}} \end{aligned}$$

definiert. Berechnen Sie die ersten Folgenglieder und stellen Sie dann eine Hypothese für eine nicht rekursive Formel zur Berechnung von a_n auf.

LÖSUNG:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{5}{4}, \quad a_2 = \frac{21}{16}, \quad a_3 = \frac{85}{64} \dots$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{4 - \frac{1}{4^{n+1}}}{3}$$

Es handelt sich um eine geometrische Reihe.

Aufgabe 7: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle konvergente Folgen mit Grenzwerten $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$a_n - b_n \longrightarrow a - b.$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (a - b)| &= |(a_n - a) + (b - b_n)| \\ &\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \underbrace{|a_n - a|}_{\substack{<\tilde{\epsilon} \\ \text{für } n>N'(\tilde{\epsilon})}} + \underbrace{|b - b_n|}_{\substack{<\tilde{\epsilon} \\ \text{für } n>N(\tilde{\epsilon})}} \\ &< 2\tilde{\epsilon} \quad \text{für} \quad n > \max\left(N'(\tilde{\epsilon}), N(\tilde{\epsilon})\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 8:

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Geben Sie zwei Definitionen dafür an, dass f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

b) Berechnen Sie direkt unter Verwendung einer der beiden Definitionen (ohne Benutzung von Ableitungsregeln) die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx + b$ für beliebige $m, b \in \mathbb{R}$.

LÖSUNG:

a) Grenzwert des Differenzenquotienten, affine Approximation.

b) Ausrechnen des Differenzenquotienten (vgl. Skript) ergibt konstant m; Approximationsgleichung mit $a = m$ ergibt $o(h) = 0$.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie Supremum und Infimum folgender Menge:

$$A = \left\{ x \mid 3 < \frac{1}{x} \leq 7 \right\}.$$

Hat diese Menge ein Maximum bzw. ein Minimum?

LÖSUNG:

$$A = \left\{ x \,|\, 3 < \frac{1}{x} \leq 7 \right\} = \left\{ x \,|\, \frac{1}{7} \leq x < \frac{1}{3} \right\}$$

$$\sup(A) = \frac{1}{3}, \quad \inf(A) = \frac{1}{7} = \min(A)$$

Die Menge besitzt kein Maximum.

Aufgabe 10: Gegeben sind die 3 Funktionen

a) $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$,

b) $g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{x^2-3}{(x-1)^2}$,

c) $h : \mathbb{R}\backslash\{\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \frac{3x-2}{|3x-2|}$.

Welche Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich? Welche Funktionen lassen sich zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion stetig ergänzen?

LÖSUNG: Alle drei Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

a)

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} \overset{x \neq 1}{=} x + 3 \to 4 \text{ für } x \to 1$$

Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = 1$ stetig ergänzbar mit dem Funktionswert

$$f(1) := 4.$$

b)

$$g(X) = \frac{x - \sqrt{3}}{x-1} \cdot \frac{x + \sqrt{3}}{x-1}$$

Für $x \downarrow 1$ (z.B. für die Folge $x_n := 1 + \frac{1}{n}$) ergibt sich:

$$\frac{x - \sqrt{3}}{x-1} \to -\infty \tag{1}$$

$$\frac{x + \sqrt{3}}{x-1} \to +\infty, \tag{2}$$

(1) und (2) ergeben zusammen

$$\frac{x^2 - 3}{(x-1)^2} \quad \to -\infty \quad \text{für } \ x \downarrow 1.$$

Für $x \uparrow 1$ (z.B. für die Folge $x_n := 1 - \frac{1}{n}$) ergibt sich dagegen:

$$\frac{x - \sqrt{3}}{x-1} \to +\infty \tag{3}$$

$$\frac{x + \sqrt{3}}{x-1} \to -\infty, \tag{4}$$

(3) und (4) ergeben zusammen

$$\frac{x^2-3}{(x-1)^2} \quad \to -\infty \quad \text{für } \ x \uparrow 1.$$

Also ist die Funktion $g(x)$ an der Stelle $x = 1$ nicht stetig ergänzbar. Als Funktionswert ergäbe sich (die Formel ist formal, d.h. symbolisch zu verstehen):

$$g(1) = \frac{-4}{0} = -\infty.$$

Man sagt, die Funktion $g(x)$ besitzt an der Stelle $x = 1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

c) Die Funktion $h(x) = \dfrac{3x-2}{|3x-2|} = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{für } x > \frac{2}{3} \\ -1 & \text{für } x < \frac{2}{3} \end{array} \right\}$ ist stetig für $x \neq \frac{2}{3}$ und hat an der Stelle $x = \frac{2}{3}$ eine Sprungstelle mit einem Sprung der Höhe 2 von -1 auf $+1$ als Unstetigkeit. Sie ist an der Stelle $x = \frac{2}{3}$ also nicht stetig ergänzbar.

Aufgabe 11: Berechnen Sie die ersten Ableitungen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = 3x^4 - 4x^2 + x - 6\ , \quad \text{b)}\ g(x) = (x^2-3)^7\ , \\ \text{c)} & h(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2-4}}{\sqrt{x^2+100}}\ , \quad \text{d)}\ i(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n-1}\right)^n . \end{array}$$

LÖSUNG:

a)

$$f'(x) = 12x^3 - 8x + 1$$

b)

$$g'(x) = 7\left(x^2-3\right)^6 2x = 14x\left(x^2-3\right)^6$$

c)

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+100}\frac{2x}{\sqrt{2x^2-4}} - \sqrt{2x^2-4}\frac{x}{\sqrt{x^2+100}}}{x^2+100} \\ &= \frac{2x\left(x^2+100\right) - x\left(2x^2-4\right)}{\sqrt{2x^2-4}\sqrt{x^2+100}\left(x^2+100\right)} \\ &= \frac{204x}{\sqrt{2x^2-4}\sqrt{x^2+100}^5} \end{aligned}$$

d)

$$i'(x) = n\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}\frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}$$

Aufgabe 12: Wie muss a gewählt werden, damit gilt:

$$(2+2h)^3 = 8 + ah + o(h) \quad \text{mit} \quad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0\,?$$

LÖSUNG:

$$a = 24, \qquad o(h) = 24h^2 + 8h^3$$

Aufgabe 13: a) Bestimmen Sie die drei lokalen Maxima und die zwei lokalen Minima der Funktion

$$W(x) = (x^2-2)^2$$

auf dem Intervall $[-2, 2]$.

b) Welche lokalen Extrema ergeben sich für die Funktion

$$f(x) = |x^2 - 3x|\ ?$$

Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion!

Tipp: Denken Sie daran, dass lokale Extrema auch am Rand auftreten können.

LÖSUNG:

a) $f(-2) = 4$ ist ein lokales Maximum,
$f(-\sqrt{2}) = 0$ ist ein lokales Minimum,
$f(0) = 4$ ist ein lokales Maximum,
$f(\sqrt{2}) = 0$ ist ein lokales Minimum und
$f(2) = 4$ ist ein lokales Maximum.

b) f ist stetig, aber nicht differenzierbar in $x = 0$ und $x = 3$.
$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$ ist ein lokales Maximum,
$f(0) = 0$ ist ein lokales Minimum und
$f(3) = 0$ ist ein lokales Minimum.

Aufgabe 14: Die Funktionen f, g, h seien stetig differenzierbar. Zeigen Sie durch Verwendung der Produktregel, dass gilt:

$$(fgh)' \quad = \quad f'gh + fg'h + fgh'\ .$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}(fgh)' &= (fg)'\,h + (fg)\,h' \\ &= (f'g + fg')\,h + fgh' \\ &= f'gh + fg'h + fgh'\end{aligned}$$

Aufgabe 15: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, d.h. die Funktion f selber ist differenzierbar und ihre erste Ableitung f' stetig. Welche Aussagen sind richtig?

a) Gilt $f'(x) > 0$ für alle x, dann hat f an der Stelle $x = a$ ein Minimum.

b) Ist f streng monoton wachsend, dann gilt für alle x die Ungleichung $f'(x) > 0$.

c) Hat f ein Minimum an der Stelle x_0 mit $a < x_0 < b$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

d) Hat f ein Minimum an der Stelle $x_0 \in [a, b]$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

e) Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

f) Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, so ist f entweder konstant oder es gibt ein $\xi \in (a, b)$, so dass f an der Stelle ξ ein Maximum oder ein Minimum hat.

LÖSUNG:

a) Ja!
$f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad f$ ist streng monoton wachsend $\Rightarrow$ Beh.

b) Nein!
$f(x) = x^3$ ist auf $[-1, 1]$ streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$ ($f'(x) \geq 0$ folgt aus dem Mittelwertsatz, jedoch nicht $f'(x) > 0$)

c) Ja!
siehe Vorlesung.

d) Nein!
siehe a): x_0 könnte a oder b sein.

e) Ja!
Satz von Rolle.

f) Ja!
Vgl. Beweis zum Satz von Rolle.

Aufgabe 16: Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Wenn f differenzierbar ist in x_0, so ist auch $|f|$ differenzierbar in x_0.

ja ☐ nein ☐

b) Wenn f und g stetig in x_0 sind, so sind auch $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ stetig in x_0. ja ☐ nein ☐

c) Wenn fg stetig in x_0 ist, so sind auch f und g stetig in x_0. ja ☐ nein ☐

d) Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist f an dieser Stelle auch stetig.

ja ☐ nein ☐

e) Ist f an der Stelle x_0 stetig, so ist f an dieser Stelle auch differenzierbar.

ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Nein!
<u>Beispiel:</u> $f(x) = x\,,\ x_0 = 0$
$|f(x)| = |x|$ ist <u>nicht</u> differenzierbar in $x_0 = 0\,.$

b) Ja!
f, g stetig in $x_0\,,$
$\Rightarrow\ |f|, |g|$ stetig in x_0

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \max\{f,g\} &= \frac{1}{2}\{f+g+|f-g|\} \\ \min\{f,g\} &= \frac{1}{2}\{f+g-|f-g|\} \end{cases}\right\} \text{stetig in } x_0\,.$$

c) Nein!

$$f(x) = 0,\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \le 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

fg ist die Nullfunktion, also stetig auf ganz $\mathbb{R}$, aber g ist nicht stetig in $x_0 = 0\,.$

d) Ja!
Satz der Vorlesung!

e) Nein!
Siehe a)!

Aufgabe 17: Berechnen Sie die ersten beiden Näherungen der folgenden Funktionen nach dem Newton-Verfahren

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

a) Für die affin-lineare Funktion $f(x) = 2x - 3$ mit $x_0 = 0$ als Startwert.

b) Für die quadratische Funktion $q(x) = x^2 - 4$ mit $x_0 = -1$ als Startwert.

c) Für die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ mit $x_0 = 0$ als Startwert.

LÖSUNG:

a) $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$

b) $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{41}{20}$

c) $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{6}{5}$, $x_2 = \frac{678}{685}$

Aufgabe 18: Zeigen Sie, daß für die Funktionen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{und} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

gilt:

$$\text{a)} \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \text{b)} \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(\tanh x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}\end{aligned}$$

Aufgabe 19: Sind die folgenden Funktionen stetig auf ihrem Definitionsgebiet?

$$\text{a)}\ \ f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) x^2 & \text{, auf } \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{b)}\ \ f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \text{ auf } \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$$

LÖSUNG:

a) Ja! Für die Argumentation vgl. mit der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) x^2 & \text{, auf } \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases}$$

aus den Übungen.

b) Ja! x^2 ist stetig, $\frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $(1-x)^2$ ist stetig, $\frac{1}{(1-x)^2}$ ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ und die Verkettung von stetigen Funktionen ist stetig.

Aufgabe 20: Ist $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) x^2 & \text{, auf } \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases}$ differenzierbar in 0?

LÖSUNG: Ja! Für die Argumentation vgl. mit der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) x^2 & \text{, auf } \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases}$$

aus den Übungen.

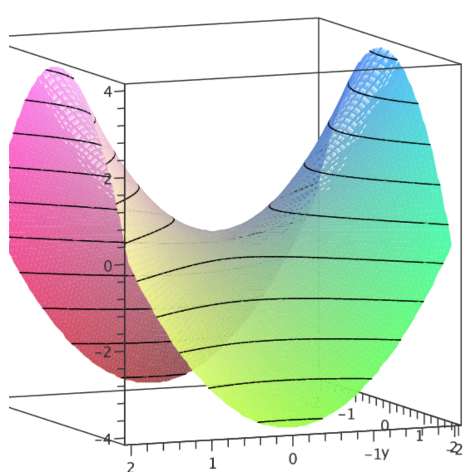
Aufgabe 21: Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$f(x,y) = (x-y)\cdot(x+y)$$

und die Menge

$$\left\{ (x,y) \;\middle|\; \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} - 1 = 0 \right\}.$$

LÖSUNG: Graph der Funktion $f(x,y)$:



Bei der angegebenen Menge handelt es sich um eine Ellipse mit den Halbachsen a und b.

Aufgabe 22: Die Fläche einer Kugelkappe ist durch die Beziehung

$$A(r, h) = 2\pi r h$$

gegeben. Dabei ist r der Radius der Kugel und h die Höhe der Kugelkappe (d.h. die Kugelkappe beginnt in Höhe $r - h$ und endet in Höhe r).

Um wieviel Prozent ändert sich (bis auf Terme höherer Ordnung) die Fläche A, wenn r und h um je 1% vergrößert werden?

LÖSUNG:

$$\frac{\partial A}{\partial r}(r, h) = 2\pi h, \qquad \frac{\partial A}{\partial h}(r, h) = 2\pi r$$

$$\begin{aligned}
& \frac{A(r + 0.01r, h + 0.01h) - A(r, h)}{A(r, h)} \\
= \ & \frac{\frac{\partial A}{\partial r}(r, h)0.01r + \frac{\partial A}{\partial h}(r, h)0.01h + o(0.01r, 0.01h)}{A(r, h)} \\
= \ & \frac{2\pi h \cdot 0.01r + 2\pi r \cdot 0.01h + o(0.01r, 0.01h)}{2\pi r h} \\
= \ & 0.02 + \frac{o(0.01r, 0.01h)}{2\pi r h}
\end{aligned}$$

Bis auf Terme höherer Ordnung vergrößert sich die Fläche also um 2 Prozent, wenn man r und h um je ein Prozent vergrößert.

Aufgabe 23:

a) Finden Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$, der senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ steht.

b) Finden Sie einen Vektor $w \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ steht.

c) Welches geometrische Objekt bilden die Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$, die senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ stehen?

d) Welches geometrische Objekt bilden die Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$, die senkrecht auf den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ stehen?

LÖSUNG:

a) Z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Z.B. $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ (Kreuzprodukt)

c) Eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ durch den Nullpunkt.

d) Eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt.

Aufgabe 24: Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden G_1 und G_2 zeichnerisch durch Anfertigen einer geeigneten Skizze und rechnerisch durch Lösen des zugehörigen linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| 2x - y = 1 \right\} \\ G_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| -x - y = \frac{5}{2} \right\}. \end{aligned}$$

LÖSUNG:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 25: Bestimmen Sie eine Gerade durch die Punkte

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen.

LÖSUNG:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y = \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}$$

Schnittpunkt der Geraden G mit der x_1-Achse: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt der Geraden G mit der x_2-Achse: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 26: a) Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

i) Zeigen Sie, daß diese vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

ii) Welche Dimension hat $\mathrm{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$?

b) Bilden die drei Vektoren

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Falls nicht, so geben Sie bitte einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ an, der sich nicht als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen läßt.

Tipp: Berücksichtigen Sie die Eigenschaften des Kreuzproduktes $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

c) Sind die drei Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig? Bilden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

LÖSUNG:

a) i)

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ii) Dimension 3

b) Die drei Vektoren bilden keine Basis, da sie linear abhängig sind ($1\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_3$).

$$\mathbf{x} = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c) Die drei Vektoren sind linear unabhängig und somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 27: Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Wie lauten die Koordinaten des Vektors

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser Basis?

LÖSUNG: Die drei Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$, da sie linear unabhängig sind. Bezüglich der Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

lauten die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, denn

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28: Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

a) $\{(1,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$	ja ☐	nein ☐
b) $\{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	ja ☐	nein ☐
c) $\{(x,2x,3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	ja ☐	nein ☐
d) $\{(x_1,x_2,x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 5x_3\}$	ja ☐	nein ☐
e) $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 7\}$	ja ☐	nein ☐

LÖSUNG:

a) <u>Nein!</u>
$U_0 := \{(1,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ ist kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, da $(0,0,0) \notin U_0$.
Aber $U_0 = (1,0,0) + \overline{U_0} = (1,0,0) + \{(0,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ ist <u>affiner</u> Unterraum!

b) <u>Ja!</u>

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

U_1 ist Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$a \in U_1 \;\Rightarrow\; \lambda a \in U_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

$$a, b \in U_1 \;\Rightarrow\; a + b \in U_1\,.$$

c) <u>Ja!</u>

$$U_2 = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

wie b)!

d) <u>Ja!</u>

$$\begin{aligned} U_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 5x_3\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid \frac{2}{\sqrt{30}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{30}} x_2 - \frac{5}{\sqrt{30}} x_3 = 0\} \end{aligned}$$

U_3 ist also eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die den Ursprung enthält.

e) <u>Nein!</u>

$$U_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 7\} \;\Rightarrow\; (0, 0, 0) \notin U_4\,!$$

Aber U_4 ist affiner UR:

$$U_4 = (1, 3, 0) + \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 0\}\,!$$

Aufgabe 29: Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ genau dann orthogonal sind, wenn gilt

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\,.$$

Interpretieren Sie die Aussage geometrisch.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= g(x - y, x - y) \\ &= g(x - y, x) - g(x - y, y) \\ &= g(x, x) - g(y, x) - g(x, y) + g(y, y) \\ &= \|x\|^2 - 2g(x, y) + \|y\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ \Leftrightarrow \quad g(x, y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x &\perp y \end{aligned}$$

Die Gleichung aus der Aufgabenstellung entspricht dem Satz des Pythagoras.

Aufgabe 30: Welche der folgenden Objekte haben eine Dimension?

a) Ein Vektorraum, ja ☐ nein ☐

b) eine Linearkombination, ja ☐ nein ☐

c) die lineare Hülle (der aufgespannte Raum) einer Menge von Vektoren, ja ☐ nein ☐

d) ein Untervektorraum, ja ☐ nein ☐

e) Welche der folgenden Zahlen kommen als Dimension eines Vektorraumes in Frage:

$$-1, 0, 1, 17.5, 42, 2001, \infty \text{ ?}$$

LÖSUNG:

a) Ja!

b) Nein!

c) Ja! (denn die lineare Hülle ist stets ein Untervektorraum, und daher ein Vektorraum)

d) Ja! (denn Untervektorräume sind Vektorräume)

e) 0 (der Vektorraum, der *nur* den Nullvektor enthält), 1 (eine Gerade durch den Nullpunkt!), 42 (ein schon etwas höherdimensionaler Vektorraum), 2001 (ein noch höherdimensionaler Vektorraum), ∞ z.B. der Vektorraum *aller* Polynome

Die Dimension ist die *Anzahl* an Basisvektoren. Diese kann zwar Null oder unendlich sein (siehe Beispiele), muss aber auf jeden Fall ganzzahlig und nicht negativ sein.

Aufgabe 31: Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Man kann je zwei Vektoren eines Vektorraumes addieren.
ja ☐ nein ☐

b) Man kann einen Vektor $\mathbf{v}$ durch einen Vektor $\mathbf{w}$ dividieren, falls $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ist.
ja ☐ nein ☐

c) Jeder Vektorraum hat ein eindeutiges Nullelement.
ja ☐ nein ☐

d) Jeder Vektorraum ein eindeutiges Einselement.
ja ☐ nein ☐

e) Ist V ein Vektorraum über dem Körper K, so ist $\{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in V\} = V$. ja ☐ nein ☐

f) Ist V ein Vektorraum über dem Körper K, so ist $\{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in V\} = V \times V$. ja ☐ nein ☐

g) $\mathbb{R}^n$ besteht aus allen n-Tupeln reeller Zahlen.
ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Ja! (Siehe Definition eines Vektorraumes!)

b) Nein! (Division durch einen Vektor ist nicht definiert.)

c) Ja! (Siehe Definition eines Vektorraumes!)

d) Nein!

e) Ja! (siehe a)!)

f) Nein!

g) Ja! Nach Definition ist das so.

Aufgabe 32: Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume, wenn man die Addition und die Multiplikation komponentenweise definiert?

a) Die Menge aller unendlichen reellen Folgen, die nur endlich viele von 0 verschiedene Komponenten haben. ja ☐ nein ☐

b) Die Menge aller unendlichen reellen Folgen, die unendlich viele von 0 verschiedene Komponenten haben. ja ☐ nein ☐

c) Die Menge aller unendlichen reellen Folgen, die nur endlich viele von 1 verschiedene Komponenten haben. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: a) Ja! Man verifiziert das Unterraum-Kriteium: i) $\mathbf{0}$ liegt darin (denn sie hat 0 nicht-Null-Komponenten, und 0 ist endlich); ii) Mit $\mathbf{x}$ aus der Menge und $\lambda \in \mathbb{R}$ liegt auch $\lambda\mathbf{x}$ in der Menge; iii) Mit $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ aus der Menge liegt auch die Summe $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ in der Menge.
b) Nein! $\mathbf{0}$ liegt nicht darin.
c) Nein! $\mathbf{0}$ liegt nicht darin.

Aufgabe 33: a) Jeder Untervektorraum ist ein affiner Unterraum.
ja ☐ nein ☐

b) Jeder affine Unterraum ist ein Untervektorraum.
ja ☐ nein ☐

c) Manche affinen Unterräume sind Untervektorräume.
ja ☐ nein ☐

d) Jeder Untervektorraum ist ein Vektorraum.
ja ☐ nein ☐

e) Jeder affine Unterraum ist ein Vektorraum.
ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Ja! Nach Definition eines affinen Untervektorraumes ist das richtig.

b) Nein! **Gegenbeispiel:** $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein affiner Unterraum im $\mathbb{R}^3$, nämlich eine Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Aber kein Untervektorraum, da der Ursprung nicht darin liegt!

c) Ja! ((Siehe a)!)

d) Ja! Nach Definition.

e) Nein! Argument wie in *b*)

Aufgabe 34: Welche der folgenden Teilmengen U von $\mathbb{R}^n$ ist ein Untervektorraum?

a) $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$,
ja ☐ nein ☐

b) $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$, ja ☐ nein ☐

c) $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$, ja ☐ nein ☐

d) $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 = 0\}$, ja ☐ nein ☐

e) $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}$. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: a) Ja!
b) Nein!
c) Ja!
d) Ja!
e) Nein!

Aufgabe 35: a) Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sind linear unabhängig, wenn eine Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ den Nullvektor ergibt.

ja ☐ nein ☐

b) Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sind linear unabhängig, wenn ihre Summe $\mathbf{0}$ ist.

ja ☐ nein ☐

c) Der Nullvektor ist nur durch die triviale Linearkombination darstellbar.

ja ☐ nein ☐

d) Der Nullvektor ist stets durch die triviale Linearkombination darstellbar.

ja ☐ nein ☐

e) Der Vektor $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

ja ☐ nein ☐

f) Der Vektor $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig, wenn $x_1 = x_2 = x_3$.

ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Nein!

b) Nein!

c) Nein!

d) Ja!

e) Ja! Ein einzelner Vektor ist per Definition genau dann linear abhängig, wenn er der Null-Vektor ist.

f) Nein!

Aufgabe 36: Sei V ein Vektorraum.

a) Jede Teilmenge einer Menge linear unabhängiger Vektoren ist linear unabhängig.

ja ☐ nein ☐

b) Jede Teilmenge einer Menge linear abhängiger Vektoren ist linear abhängig.

ja ☐ nein ☐

c) Wenn eine Basis von V endlich ist, sind alle Basen von V endlich.

ja ☐ nein ☐

d) Es gibt eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Vektoren der Form (α, α, α).

ja ☐ nein ☐

e) Jede Basis des $\mathbb{R}^3$ besteht aus Vektoren der Form (x, x, x).

ja ☐ nein ☐

f) Jeder Vektor der Form (α, α, α) kann zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden.

ja ☐ nein ☐

g) Jeder Vektor der Form (α, α, α) mit $\alpha \neq 0$ kann zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden.

ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Ja! Wäre die Teilmenge der Vektoren linear abhängig, so wäre es auch die gesamte Menge. Die Teilmenge muss also auch linear unabhängig sein.

b) Nein! Gegenbeispiel: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sind linear abhängig, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ jedoch linear unabhängig.

c) Ja! In der Vorlesung gibt es einen Satz der folgendes besagt: Sind $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ zwei verschiedene Basen eines Vektorraumes V, so gilt $n = m$. Ist n endlich, so ist also auch m endlich.

d) Nein! Zwei Vektoren der Form (α, α, α) sind immer linear abhängig (also auch drei). Da eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aber aus drei linear unabhängigen Vektoren bestehen muss, kann sie nie nur aus Vektoren der Form (α, α, α) bestehen.

e) Nein!

f) Nein! Den Vektor $(0, 0, 0)$ kann man nicht zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ erweitern.

g) Ja! Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ mit $\alpha \neq 0$ bildet zum Beispiel eine Basis des $\mathbb{R}^3$, denn es handelt sich dabei um drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 37: Bestimmen Sie eine 3×3 Matrix $\mathbf{P}$ so, dass $\mathrm{Ker}(\mathbf{P})$ die Ebene

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \qquad \text{ist.}$$

LÖSUNG:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta & \beta \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, nicht alle drei gleichzeitig Null.

Aufgabe 38: Sind die folgenden Polynome linear abhängig?

$$\begin{aligned} t &\mapsto 1 - t \\ t &\mapsto 3 - 7t \\ t &\mapsto 4t \end{aligned}$$

LÖSUNG: Ja, denn

$$-3 \cdot (1 - t) + 1 \cdot (3 - 7t) + 1 \cdot (4t) = 0.$$

Aufgabe 39: Sind die folgenden Vektoren linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG: Da es sich um drei Vektoren aus einem zweidimensionalen Vektorraum handelt, sind sie automatisch linear abhängig.

Aufgabe 40: Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2,2}$ kann man addieren und multiplizieren. Nennen Sie zwei Gründe dafür, dass die 2×2-Matrizen trotzdem keinen Körper bilden.

LÖSUNG: Produkt ist nicht kommutativ, Nicht jede Nicht-Null-Matrix hat eine multiplikative Inverse, Es gibt Nicht-Null-Matrizen, deren Produkt Null ist.

Aufgabe 41: Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 4x + 3y + z &= 9 \\ 2y - z &= 0 \\ 3z &= 6\,. \end{aligned}$$

LÖSUNG: $z = 2$, $y = 1$ und $x = 1$.

Aufgabe 42: Ein Parallelogramm werde durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und ein Parallelepiped durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms und das Volumen des Parallelepipeds.

LÖSUNG: Die Fläche des Parallelogramms beträgt 2 und das Volumen des Parallelepipeds 3.

Aufgabe 43: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mittels Gauß-Elimination.

b) In der LR-Zerlegung treten Matrizen $L^{(1)}, L^{(2)}, (L^{(1)})^{-1}, (L^{(2)})^{-1}$ auf. Geben Sie diese an, und berechnen Sie $L = (L^{(2)})^{-1}(L^{(1)})^{-1}$.

c) Geben Sie weiterhin die Matrix R der LR-Zerlegung an.

d) Lösen Sie schließlich das Gleichungssystem $Ax = b$ noch einmal, diesmal durch Vorwärtseinsetzen ($Ly = b$) und anschließendes Rückwärtseinsetzen ($Rx = y$).

LÖSUNG:

a)

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \left(L^{(1)}\right)^{-1} \left(L^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

d)

$$y = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 44: Berechnen Sie das Matrix-Produkt

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 9 \\ 7 & -6 & 14 \\ -1 & 2 & -4 \\ 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 45: Alle in dieser Aufgabe auftretenden Matrizen seien über dem Körper $\mathbb{R}$ definiert; A und B seien zwei solche Matrizen.

a) Man kann zwei beliebige Matrizen miteinander multiplizieren.
ja ☐ nein ☐

b) Man kann jede Matrix mit sich selbst multiplizieren.
ja ☐ nein ☐

Man kann das Produkt AB von A und B bilden, wenn die folgenden Zahlen gleich sind:

c) Die Anzahl der Zeilen von A und die Anzahl der Spalten von B.
ja ☐ nein ☐

d) Die Anzahl der Spalten von A und die Anzahl der Zeilen von B.
ja ☐ nein ☐

e) Die Anzahl der Spalten von A und die Anzahl der Spalten von B.
ja ☐ nein ☐

f) Die Anzahl der Zeilen von A sowie die Anzahl der Zeilen und Spalten von B.
ja ☐ nein ☐

g) Wenn AB definiert ist, so ist auch BA definiert.
ja ☐ nein ☐

h) Wenn AB und BA definiert ist, dann ist $AB = BA$.
ja ☐ nein ☐

i) Wenn AB und BA definiert ist, dann ist $AB \neq BA$.
ja ☐ nein ☐

j) Wenn A und B verschieden von der Nullmatrix sind, dann ist auch AB verschieden von der Nullmatrix.
ja ☐ nein ☐

k) Wenn A verschieden von der Nullmatrix ist, dann ist auch AA verschieden von der Nullmatrix.
ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Nein!

b) Nein!

c) Nein!

d) Ja!

e) Nein!

f) Nein!

g) Nein!

h) Nein!

i) Nein!

j) Nein! Gegenbeispiel: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

k) Nein! Gegenbeispiel: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 46: Sei f eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

a) $m \leq n$, ja ☐ nein ☐

b) $n \leq m$, ja ☐ nein ☐

c) $m = n$. ja ☐ nein ☐

d) Nur der Nullvektor wird auf den Nullvektor abgebildet. ja ☐ nein ☐

e) Es gibt genau drei lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$. ja ☐ nein ☐

f) Falls $m, n \geq 1$ gibt es unendlich viele lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$. ja ☐ nein ☐

g) Es gibt unendlich viele lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: a) Nein!
b) Nein!
c) Nein!
d) Nein!
e) Nein!
f) Ja!
g) Ja!

Aufgabe 47: Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung eines Vektorraumes V in einen Vektorraum W. Dann gilt:

a) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. ja ☐ nein ☐

b) $f(1) = 1$. ja ☐ nein ☐

c) $f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$ für alle $\mathbf{v} \in V$. ja ☐ nein ☐

d) $f(k\mathbf{v}) = f(k) + f(\mathbf{v})$ für alle $k \in K$ und alle $\mathbf{v} \in V$. ja ☐ nein ☐

e) $f(k\mathbf{v}) = f(k) \cdot f(\mathbf{v})$ für alle $k \in K$ und alle $\mathbf{v} \in V$. ja ☐ nein ☐

f) $f(k\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v})$ für alle $k \in K$ und alle $\mathbf{v} \in V$. ja ☐ nein ☐

g) $\text{Bild}(f) = W$. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG: a) Ja!
b) Nein!
c) Ja!
d) Nein!
e) Nein!
f) Ja!
g) Nein!
a) - f) ergeben sich alle unmittelbar aus der Definition einer linearen Abbildung. Als Gegenbeispiel für g) betrachte man: $V = \mathcal{P}^k = W$ und $f : V \to W, p(t) \to f(p(t)) = p'(t)$.

Aufgabe 48: Sei $U = \text{Ker}(f)$ der Kern einer linearen Abbildung $f : V \to W$. Dann gilt:

a) $U = \{\mathbf{w} \in W \mid f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}\}$. ja ☐ nein ☐

b) $U = \{\mathbf{w} \in V \mid f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}\}$. ja ☐ nein ☐

c) $U = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. ja ☐ nein ☐

d) $U = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. ja ☐ nein ☐

e) $U = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = 1\}$. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Nein!

b) Ja!

c) Nein!

d) Nein!

e) Nein!

Ergeben sich alle direkt aus der Definition des Kerns einer linearen Abbildung als Urbild des Nullvektors im Bild.

Aufgabe 49: Geben Sie die Matrixdarstellungen folgender linearer Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ in der Standardbasis an:

a) Drehung um $\frac{\pi}{4}$,

b) Spiegelung an der Geraden $g = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 4x_2 = 0\}$,

c) erst Drehung um $\frac{\pi}{4}$, dann Spiegelung an der Geraden $g = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 4x_2 = 0\}$.

LÖSUNG:

a) Aus der Vorlesung ist bekannt, daß eine Drehung um den Winkel ϕ die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ besitzt. Mit dem Einsetzen der Werte für $\phi = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich

$$M_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Spiegelung: Die Gerade g ist in Normalenform gegeben. Nach Normieren erhalten wir $n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ für den Normalenvektor. Damit gilt mit der Formel aus der Vorlesung

$$M_b = \mathbb{1} - 2nn^\top = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}.$$

c) Die Nacheinanderausführung ist das Produkt beider Matrizen. Damit erhalten wir

$$M_b M_a = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 31 & 17 \\ 17 & -31 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 50: a) Wie lautet die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ x_2 + x_1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ des $\mathbb{R}^2$?

b) Zeigen Sie, dass $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bildet und bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung aus a) bezüglich dieser Basis (als Basis von Urbild- und Bildraum).

LÖSUNG:

a)

$$f(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

b) Die beiden Vektoren sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

also ist $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ Matrixdarstellung von f bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 51: Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4323 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

a)

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 392$$

b)

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4323 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 120$$

Aufgabe 52: a) Gegeben sei eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung.
Geben Sie die Dimension von Kern und Bild an.
Sind die Spalten-/Zeilenvektoren linear abhängig?

b) Betrachten Sie nun die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie wieder Kern und Bild dieser Abbildung.

LÖSUNG:

a)

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, Ax = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Bild}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Offenbar ist $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$, also nach der Dimensionsformel $\dim \mathrm{Bild}(A) = 3$. (D.h. also die drei Spalten von A sind eine Basis des Bildes, und die Parametrisierung des Bildvektorraums über drei reelle Parameter x_1, x_2, x_3 ist sinnvoll.) Die Spaltenvektoren sind daher linear unabhängig, die Zeilenvektoren sind linear abhängig.

b)

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Nach der Dimensionsformel ist $\dim \mathrm{Bild}(A) = 3$, also ist $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 53: a) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und ein $c \in \mathbb{R}$ an, so dass die Niveaulinie $\{x \mid f(x) = c\}$ der Einheitskreis (der Kreis mit Radius 1 um den Nullpunkt) ist.

b) Geben Sie ein Intervall $[a, b) \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $\gamma : [a, b) \to \mathbb{R}^2$ an, die den Einheitskreis (den Kreis mit Radius 1 um den Nullpunkt) durchläuft.

Lösung:

a) $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ und $c = 1$.

b) $[a, b) = [0, 2\pi)$ und $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Aufgabe 54: Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &:= \max(|x_1 - x_2|, |x_1 + x_2|) = |x_1| + |x_2| \\ g(x_1, x_2) &:= |x_1| - |x_2| \,. \end{aligned}$$

a) Bestimmen und beschreiben Sie die Niveaumengen

$$\begin{aligned} N_r(f) &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = r\} \quad \text{und} \\ N_r(g) &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1, x_2) = r\} \,. \end{aligned}$$

Fertigen Sie auch eine Skizze einiger Niveaumengen an.

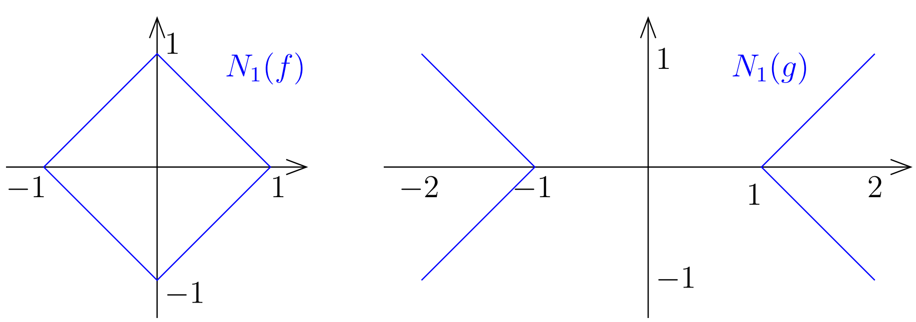
b) Bestimmen und beschreiben Sie den Graphen der Funktionen f und g. Skizzieren Sie die Graphen ebenfalls.

c) In welchen Punkten sind die Funktionen f, g differenzierbar bzw. in welchen Punkten sind sie nicht differenzierbar?

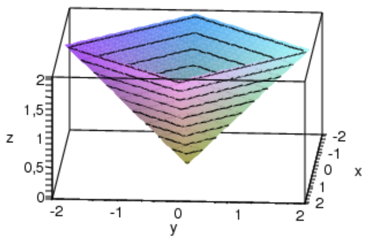
Tipp: Man kann dies anhand des jeweiligen Graphen erkennen!

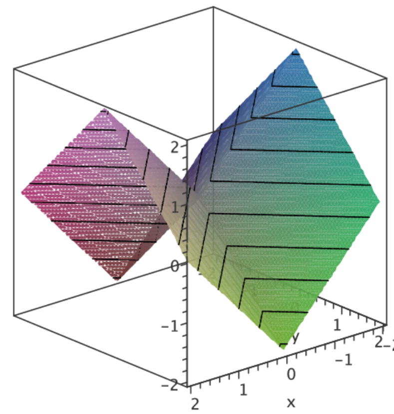
Lösung:

a) Niveaumengen $N_1(f)$ und $N_1(g)$.



b) Links ist der Graph von f und rechts der Graph von g abgebildet.





c) Beide Funktionen sind entlang der Koordinatenachsen nicht differenzierbar.

Aufgabe 55: Bestimmen Sie die Gleichung des Tangentialraumes an den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) = 2x + 5y^2x$ im Punkte $(2, 1, f(2,1))$.

Lösung: Es gilt $f(2,1) = 14$. Damit geht die Tangentialebene (=Tangentialraum) durch den Punkt $(2, 1, 14)$. Weiterhin ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 + 5y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 10xy.$$

Einsetzen liefert $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 7$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 20$. Damit lautet die Gleichung der Tangentialebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 56: Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= \begin{pmatrix} 2r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \qquad \text{und} \\ d(x_1, x_2, x_3) &:= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,, \end{aligned}$$

wobei h, r positiv seien und $0 \le t \le 6\pi$ gelte. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(t) := d(\gamma(t))$$

a) direkt, d. h. indem Sie zuerst $f(t)$ berechnen und danach $f'(t)$.

b) mit Hilfe der Kettenregel.

c) Beschreiben Sie die durch $\gamma(t)$ gegebene Kurve im $\mathbb{R}^3$ und skizzieren Sie diese Kurve.

LÖSUNG:

a)

$$f(t) = \sqrt{4r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t + h^2t^2}$$
$$f'(t) = \frac{-3r^2\sin t\cos t + h^2 t}{\sqrt{4r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t + h^2t^2}}$$

b)

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -2r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}, \quad \nabla d(x_1,x_2,x_3) = \frac{(x_1,x_2,x_3)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$
$$\Rightarrow \quad ((\nabla d)\circ\gamma(t))\,\dot\gamma(t) = \frac{-3r^2\sin t\cos t + h^2 t}{\sqrt{4r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t + h^2t^2}}$$

c) Die Projektion der Kurve γ in die $x_1 - x_2-$Ebene ist eine Ellipse mit den Halbachsen $2r$ und r. Außerdem schraubt sich die Kurve mit jedem Umlauf um $2\pi h$ in die Höhe.

Aufgabe 57: Gegeben seien die Funktionen

$$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y+2x \\ x^3-2y^2x \end{pmatrix},$$
$$g: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\ln(1+y^2)+z \\ \cos(zx)+y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls existent die Jacobimatrix $D(f\circ g)(2,0,0)$.

LÖSUNG: Zunächst ist $g(2,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weiterhin sind alle Funktionen stetig differenzierbar. Damit existiert die Ableitung und mit der Kettenregel erhalten wir

$$Df = \begin{pmatrix} 2xy+2 & x^2 \\ 3x^2-2y^2 & 4xy \end{pmatrix}, \quad Dg = \begin{pmatrix} \ln(1+y^2) & \frac{2xy}{1+y^2} & 1 \\ -z\sin(xz) & 1 & -x\sin(xz) \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen der Werte und die Matrixmultiplikation erhalten wir

$$D(f\circ g)(2,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 58: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$g(x,y) = f((x+y)^2)\,.$$

LÖSUNG:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'((x+y)^2)2(x+y), \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = f'((x+y)^2)2(x+y)$$