Klausur zum Modul Ingenieurmathematik I (B21) **28. März 2013**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können insgesamt 110 Punkte erreicht werden.
Zum Bestehen sind mindestens 45 Punkte erforderlich.

Prüfer: Prof. Dr. Martin Rumpf, Dr. Martin Lenz

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nummer einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen.

Schlüsselwort: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10
Aufgabe	7	8	9	10	11	$\sum$
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/110

Note: Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^{27} - \pi x^{12} + 7x^3$. (1 Punkt)

b) $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1})$. (3 Punkte)

c) $h(x) = \sin(x) \cdot \ln(e^{\cos(x)}) = \sin(x) \cdot \ln(\exp(\cos(x)))$. (3 Punkte)

d) $w(x) = \frac{x^3+6x-1}{(x+3)^2}$. (3 Punkte)

LÖSUNG:

a)

$$f'(x) = 27x^{26} - 12\pi x^{11} + 21x^2.$$

b)

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x = \frac{x}{x^2+1}$$

oder

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \ln(\sqrt{x^2+1}) = \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \ln(x^2+1) = \frac{x}{x^2+1}.$$

c)

$$\begin{aligned} h'(x) &= \cos(x) \cdot \ln(e^{\cos(x)}) + \sin(x) \frac{1}{e^{\cos(x)}} e^{\cos(x)} (-\sin(x)) \\ &= \cos(x) \cdot \ln(e^{\cos(x)}) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x). \end{aligned}$$

oder

$$h'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sin(x) \cdot \ln(e^{\cos(x)})\right) = \frac{d}{dx} (\sin(x) \cdot \cos(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

d)

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{(3x^2+6)(x+3)^2 - (x^3+6x-1) \cdot 2(x+3)}{(x+3)^4} \\ &= \frac{(3x^2+6)(x+3) - 2(x^3+6x-1)}{(x+3)^3} \\ &= \frac{3x^3+6x+9x^2+18-2x^3-12x+2}{(x+3)^3} \\ &= \frac{x^3+9x^2-6x+20}{(x+3)^3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: a) Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := e^{\left(\frac{2n+3}{2n^2+n-1}\right)} = \exp\left(\frac{2n+3}{2n^2+n-1}\right).$$

i) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (3 Punkte)

ii) Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt? (1 Punkt)

b) Betrachten Sie die Reihe

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

i) Zeigen Sie

$$S_n = \frac{n}{2(n+2)} \quad \text{für } n \geq 1.$$

(4 Punkte)

ii) Bestimmen Sie den Grenzwert von S_n für $n \to \infty$. (2 Punkte)

LÖSUNG:

a) i) Es gilt

$$a_n = e^{b_n}$$

wobei

$$b_n = \frac{2n+3}{2n^2+n-1}.$$

Konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da exp() stetig. Daher überprüfen wir zunächst die Konvergenz von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n^2+n-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{0+0}{2+0-0} = \frac{0}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{b_n} = e^0 = 1.$$

ii) **1. Möglichkeit:** Aus der Vorlesung ist bekannt: Jede konvergente Folge ist beschränkt. Da die Folge konvergiert, ist die Folge beschränkt.

2. Möglichkeit: Zunächst gilt: $2n+3>0$ und $2n^2-n+1>0$, so dass $b_n>0$ für alle $n\geq 1$. Des Weiteren gilt $b_1=\frac{5}{2}$ und $b_n>b_{n+1}$. Dies folgt aus:

$$b_n=\frac{2n+3}{2n^2+n-1}>\frac{2(n+1)+3}{2(n+1)^2+(n+1)-1}=b_{n+1}$$
$$\leftrightarrow\quad (2n+3)(2(n+1)^2+(n+1)-1)>(2(n+1)+3)(2n^2+n-1)$$
$$\leftrightarrow\quad (2n+3)(2n^2+5n+2)>(2n+5)(2n^2+n-1)$$
$$\leftrightarrow\quad 4n^3+10n^2+4n+6n^2+15n+6>4n^3+2n^2-2n+10n^2+5n-5$$
$$\leftrightarrow\quad 4n^3+16n^2+19n+6>4n^3+12n^2+3n-5$$
$$\leftrightarrow\quad 4n^2+16n+11>0.$$

Somit folgt insgesamt: $a_1=e^{\frac{3}{2}}$, a_n ist monoton fallend und $a_n>1$ für alle $n\geq 1$, d.h. beschränkt.

b) i) Wir beweisen die Behauptung mittels Induktion.

Induktionsanfang: Für $n=1$ gilt:

$$S_1=\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{(1+1)\cdot(1+2)}=\frac{1}{6}=\frac{1}{2(1+2)}.$$

Induktionsbehauptung: Für $n\geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{n}{2(n+2)}.$$

Induktionsschluss: Wir zeigen nun den Übergang $n\to n+1$:

$$\begin{aligned}
S_{n+1}&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\\
&\overbrace{=}^{S_n=\frac{n}{2(n+2)}}\frac{n}{2(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\\
&=\frac{n(n+3)+2}{2(n+2)(n+3)}=\frac{n^2+3n+2}{2(n+2)(n+3)}\\
&=\frac{n^2+2n+n+2}{2(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+2)+(n+2)}{2(n+2)(n+3)}\\
&=\frac{n+1}{2(n+3)}=\frac{n+1}{2((n+1)+2)}.
\end{aligned}$$

ii) Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 3: a) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ mit der Vorschrift

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}.$$

Ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$? (2 Punkte)

b) Betrachten Sie wieder $f(x)$ aus Teilaufgabe a).
Ist $f(x)$ stetig ergänzbar auf $\mathbb{R}$? (3 Punkte)

c) Berachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit der Vorschrift

$$g(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) x.$$

Ist $g(x)$ stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$? (2 Punkte)

d) Betrachten Sie wieder $g(x)$ aus Teilaufgabe c).
Ist $g(x)$ stetig ergänzbar auf $\mathbb{R}$? (3 Punkte)

Lösung:

a) Es gilt
   - $x^2 - 2x + 1$ ist stetig auf $\mathbb{R}$,
   - $x - 1$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ mit Nullstellenmenge $\{1\}$.

   Da der Quotient stetiger Funktionen ausgenommen der Nullstellen des Nenners wieder stetig ist, ist $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

b) Zunächst betrachten wir das Verhalten von f nahe 1:

$$\begin{aligned} f(1 \pm h) &= \frac{(1 + (\pm h))^2 - 2(1 + (\pm h)) + 1}{(1 + (\pm h)) - 1} = \frac{1 + 2(\pm h) + h^2 - 2 - 2(\pm h) + 1}{\pm h} \\ &= \frac{h^2}{\pm h} = \pm h. \end{aligned}$$

   Somit strebt f nahe 1 gegen 0. Daher können wir f an der Stelle $x = 1$ mit 0 stetig fortsetzen:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

c) Es gilt:
   - x ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,
   - $\frac{1}{x^2}$ ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
   - $\sin()$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Da die Komposition (Verkettung) stetiger Funktionen wieder stetig ist, ist $g(x)$ stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

d) Da $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$ für all $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, gilt

$$-x \leq \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) x \leq x.$$

Für $x \to 0$ gilt $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) x \to 0$. Daher können wir $g(x)$ an der Stelle $x = 0$ mit 0 fortsetzen:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4: Betrachten Sie die reelle Funktion

$$h(x) = \exp\left(2x^2 - x^4\right) = e^{2x^2 - x^4}.$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an. (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie die Menge der Nullstellen von $h(x)$. (1 Punkt)

c) Bestimmen Sie die lokalen Extrempunkte von $h(x)$. Bestimmen Sie weiterhin, ob es sich bei diesen Punkten um ein Minima oder Maxima handelt. (5 Punkte)

d) Wie verhält sich $h(x)$ im Unendlichen, d.h. wie verhält sich $h(x)$ für $x \to \pm\infty$? (1 Punkt)

e) Zeichnen Sie die Funktion. (2 Punkte)

Lösung:

a) Es gilt $D = \mathbb{R}$.

b) Die Funktion besitzt keine Nullstellen, da $\exp(2x^2 - x^4) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Zur Bestimmung der Extrempunkte bestimmen wir zunächst die erste und zweite Ableitung von $h(x)$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (4x - 4x^3)\exp\left(2x^2 - x^4\right), \\ h''(x) &= (4 + 4x - 12x^2 - 4x^3)\exp\left(2x^2 - x^4\right). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} h'(x) = 0 &= (4x - 4x^3)\exp\left(2x^2 - x^4\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = (4x - 4x^3) = x(4 - 4x^2) \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1. \end{aligned}$$

Nun setzen wir die Punkte in die zweite Ableitung ein und erhalten:

$$\begin{aligned} &x_1 : h''(0) = 4\exp(0) = 4 > 0 \Rightarrow \text{ Min.} \\ &x_2 : h''(1) = (-8)\exp(2-1) < 0 \Rightarrow \text{ Max.} \\ &x_3 : h''(-1) = (-8)\exp(2-1) < 0 \Rightarrow \text{ Max.} \end{aligned}$$

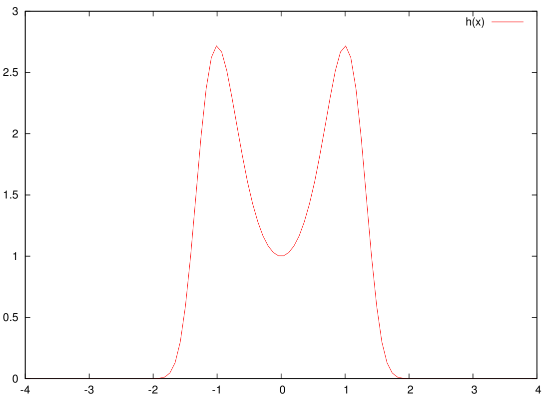
(Alternativ: Argumentation bzgl. des Vorzeichens von h'.)

d) Es gilt

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \exp\left(2x^2 - x^4\right) = 0,$$

da $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x^2 - x^4) = -\infty$

e)



Aufgabe 5: Betrachten Sie die 3 Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -22 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^3.$$

a) Berechnen Sie, ob die Vektoren linear unabhängig sind. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Dimension von $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. (3 Punkte)

c) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$ und eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an. (2 Punkte)

LÖSUNG:

a) **1.Möglichkeit:**

$$\begin{array}{lccccccl} & -2\lambda_1 & +6\lambda_2 & -22\lambda_3 & = & 0 & & \\ & & -\lambda_2 & +3\lambda_3 & = & 0 & \Rightarrow & \lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_2 \\ & 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & & = & 0 & \Rightarrow & \lambda_1 = -\frac{2}{3}\lambda_2 \\ \hline & -2(-\frac{2}{3}\lambda_2) & +6\lambda_2 & -22(\frac{1}{3}\lambda_2) & = & 0 & & \\ \Rightarrow & \frac{4}{3}\lambda_2 & +\frac{18}{3}\lambda_2 & -\frac{22}{3}\lambda_2 & = & 0 & & \\ \Rightarrow & & & 0 & = & 0 & \Rightarrow & \text{linear abhängig} \end{array}$$

2.Möglichkeit:

$$\begin{array}{rrr|ll} -2 & 6 & -22 & 0 & \mid \cdot (-\frac{1}{2}) \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \\ 3 & 2 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & -3 & 1 & 0 & \mid \cdot (-3) \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \\ 3 & 2 & 0 & 0 & \hookleftarrow + \\ \hline 1 & -3 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \mid \cdot (11) \\ 0 & 11 & -33 & 0 & \\ \hline 1 & -3 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Rightarrow \quad \text{linear abhängig} \\ \hline \end{array}$$

b) Da die Vektoren linear abhängig sind, aber die Vektoren nicht Vielfache eines einzelnen Vektors sind, ist die Dimension 2.
Alternativ: 2 Nicht-Null Diagonaleinträge in der Dreiecksform.

Aufgabe 6: Betrachten Sie die Punkte:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie die Ebene, welche die 3 Punkte enthält. Geben Sie dabei die Ebene sowohl in Parameterdarstellung

$$\{p + tv + sw \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

als auch in Normalendarstellung

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot n = d\}$$

an. (7 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, welches durch die Punkte P_0, P_1, P_2 gegeben ist. (3 Punkte)

LÖSUNG:

a) Wir betrachten P_0 als Ortsvektor (Stützvektor) und bestimmen die Richtungen der Ebene durch:

$$P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Parameterdarstellung:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Richtungsvektoren berechnen wir eine Normalenrichtung:

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch einsetzen eines Punktes der Ebene erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Damit ist die Normalendarstellung gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x = 1.$$

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Betrag des Vektorprodukts der beiden Richtungsvektoren gleich dem Flächeninhalt des durch die Richtungsvektoren aufgespannten Parallelograms ist. Somit gilt für das Dreieck $\frac{\sqrt{3}}{2}$, da $\|n\| = \sqrt{3}$.

Aufgabe 7: Bestimmen Sie die Inverse der Matrix (8 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie, dass $A^{-1}A = \mathbb{1}$ (Probe). (2 Punkte)

LÖSUNG:

$$\begin{array}{ccc|cccll}
2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & |\cdot(\frac{1}{2}) & \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & & \\
1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & |\cdot(1) & |\cdot(-1) \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & \hookleftarrow + & \\
1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \\
0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & |\cdot(\frac{2}{3}) & \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & |\cdot(1) & \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \hookleftarrow + & \\
\hline
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & & \\
0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & |\cdot(\frac{3}{4}) & \\
\hline
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \hookleftarrow + \\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \hookleftarrow + & \\
0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & |\cdot(\frac{1}{3}) & |\cdot(-\frac{1}{2}) \\
\hline
1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \hookleftarrow + & \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & |\cdot(\frac{1}{2}) & \\
0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & & \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & & \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & & \\
\hline
\end{array}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

a) Geben Sie die Matrix $S \in \mathbb{R}^{2,2}$ an, welche x um einen Faktor $r \in \mathbb{R}_+$ streckt. (1 Punkt)

b) Geben Sie die Matrix $W \in \mathbb{R}^{2,2}$ an, welche x um den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ entgegen dem Uhrzeigersinn dreht. (1 Punkt)

c) Berechnen Sie die Verkettung der Abbildungen aus a) und b), d.h. $V = S \cdot W$. (2 Punkte)

d) Berechnen Sie das Bild des Vektors $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ unter der Abbildung V. (2 Punkte)

e) Bestimmen Sie $r \in \mathbb{R}_+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ so, dass $V \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 Punkte)

f) Sind die Matrizen S, W, V invertierbar? (2 Punkte)

Lösung:

a) Die Abbildung ist gegeben durch:

$$S_r = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

b) Die Drehung ist gegeben durch:

$$W_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

c) Die Verkettung ist gegeben durch:

$$V = S_r \cdot W_\varphi = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

d) Der Vektor wird abgebildet auf:

$$\begin{pmatrix} r\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

(Polarkoordinaten).

e) Zunächst drehen wir den Vektor um 45 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn:

$$W_{\pi/4}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Nun strecken wir den Vektor um den Faktor $\sqrt{2}$ und erhalten:

$$S_{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

f) Wir berechnen die Determinanten der Matrizen:

$$\det S=r^2,\quad \det W=1,\quad \det V=\det S\cdot\det W=r^2.$$

Da alle Determinanten ungleich Null sind, sind alle Matrizen invertierbar.

Aufgabe 9: Es sei

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t)\sin(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi), \text{ eine Kurve im } \mathbb{R}^2.$$

a) Berechnen Sie $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Funktionswerte von $\gamma(t)$ und $\dot{\gamma}(t)$ für $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$.
Zeichnen Sie die Kurve.
Zeichnen Sie auch die Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\gamma}(t)$ ein. (5 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Parameter $s, t \in [0, 2\pi)$, $s \neq t$ für die gilt $\gamma(s) = \gamma(t)$. (1 Punkte)

d) Berechnen Sie den Winkel der Tangenten (Schnittwinkel) in dem Punkt, in dem die Kurve sich selbst schneidet. (2 Punkte)

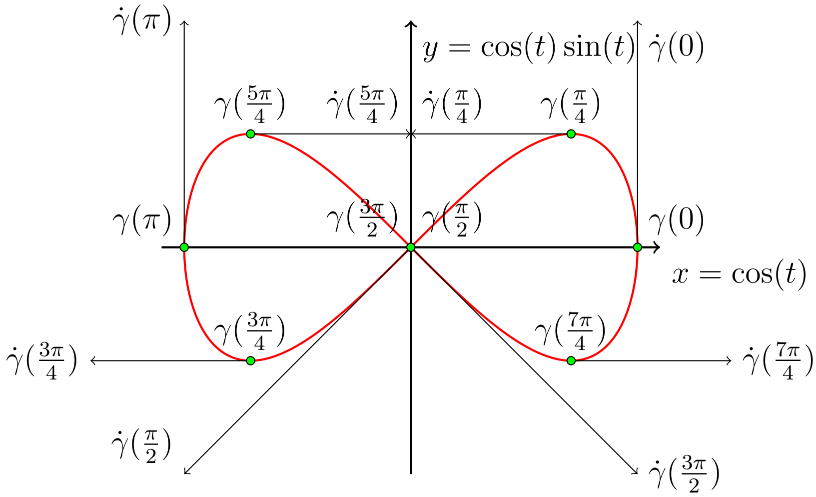
LÖSUNG:

a)

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\sin^2(t) + \cos^2(t) \end{pmatrix}$$

b)

- $t = 0$: $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $t = \frac{\pi}{4}$: $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $t = \frac{\pi}{2}$: $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- $t = \frac{3\pi}{4}$: $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $t = \pi$: $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $t = \frac{5\pi}{4}$: $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $t = \frac{3\pi}{2}$: $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- $t = \frac{7\pi}{4}$: $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.



c) $s = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{3\pi}{2}$: $\gamma(s) = \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Es gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\dot\gamma(s) \cdot \dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(s)| \cdot |\dot\gamma(t)|}.$$

Somit folgt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = 0,$$

d.h. $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$.

Aufgabe 10: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Vorschrift

$$f(x, y) := x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1.$$

a) Berechnen Sie die folgenden Funktionswerte $f(0,0)$, $f(2,0)$, $f(0,2)$, $f(-2,0)$, $f(0,-2)$, $f(2,2)$, $f(2,-2)$, $f(-2,2)$, $f(-2,-2)$. (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie alle Punkte (x, y) für die gilt $f(x, y) = 0$, d.h. die Niveaulinien zum Wert 0. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} f(x, y)$. (2 Punkte)

d) Berechnen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ für die gilt $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$. (3 Punkte)

e) Skizzieren Sie die 0-Niveaulinien und alle Punkte und Funktionswerte aus Teilaufgabe d) im $\mathbb{R}^2$.
Tragen Sie auch die Punkte und Funktionswerte aus Teilaufgabe a) ein. (2 Punkte)

LÖSUNG:

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 1,\\
f(2,0) &= -3,\\
f(0,2) &= -3,\\
f(-2,0) &= -3,\\
f(0,-2) &= -3,\\
f(2,2) &= 9,\\
f(-2,2) &= 9,\\
f(2,-2) &= 9,\\
f(-2,-2) &= 9.
\end{aligned}$$

b) Da $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$ gilt $f(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = \pm 1$ oder $y = \pm 1$. Daher gilt:

$$N_0(f) = \{(x, y) |\ x = 1\} \cup \{(x, y) |\ x = -1\} \cup \{(x, y) |\ y = 1\} \cup \{(x, y) |\ y = -1\}.$$

c) Es gilt:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 - 2x \\ 2x^2y - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(y^2 - 1) \\ 2y(x^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

d) Es muss gelten grad $f(x,y) = (0,0)$, d.h. $f_x(x,y) = 0$ und $f_y(x,y) = 0$. Betrachten wir zunächst $f_x(x,y) = 0$, dann gilt

$$2xy^2 - 2x = 2x(y^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad (y^2 - 1) = 0, \text{ d.h. } y = \pm 1.$$

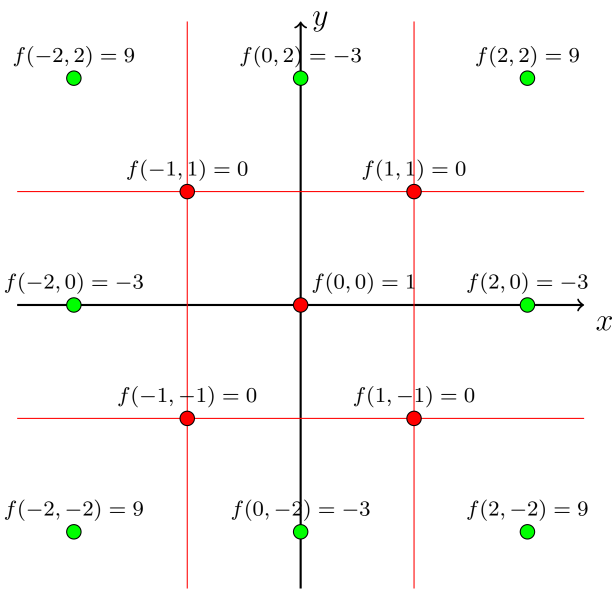
Nun ist die Frage wann gilt für diese 3 Fälle, dass $f_y(x,y) = 2x^2y - 2y = 2y(x^2 - 1) = 0$?

1.Fall $x = 0$**:** Hier gilt $f_y(0,y) = 2y(0^2 - 1) = -2y = 0$ genau dann, wenn $y = 0$. Somit ist $P_1 = (0,0)$ ein kritischer Punkt.

2.Fall $y = 1$**:** Hier gilt $f_y(x,1) = 2 \cdot 1(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) = 0$ genau dann, wenn $x = \pm 1$. Somit sind $P_2 = (1,1)$ und $P_3 = (-1,1)$ kritische Punkte.

3.Fall $y = -1$**:** Hier gilt $f_y(1,y) = 2 \cdot (-1)(x^2 - 1) = -2(x^2 - 1) = 0$ genau dann, wenn $x = \pm 1$. Somit sind $P_4 = (1,-1)$ und $P_5 = (-1,-1)$ kritische Punkte.

e)



Aufgabe 11: Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)

LÖSUNG:

1.Möglichkeit: Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccccc|cc}
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & |\cdot(-1) & |\cdot(-1) \\
0 & 2 & -1 & 2 & -1 & & \\
2 & 1 & 1 & -2 & -1 & \hookleftarrow + & \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & & \hookleftarrow + \\
0 & 2 & 3 & -1 & -1 & & \\
\hline
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & 2 & -1 & 2 & -1 & |\cdot(-\frac{1}{2}) & |\cdot(-1) \\
0 & 1 & 0 & -2 & -1 & \hookleftarrow + & \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & & \\
0 & 2 & 3 & -1 & -1 & & \hookleftarrow + \\
\hline
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & 2 & -1 & 2 & -1 & & \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} & |\cdot(-8) & \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & & \\
0 & 0 & 4 & -3 & 0 & & \hookleftarrow + \\
\hline
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & 2 & -1 & 2 & -1 & & \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} & & \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & & |\cdot(21) \\
0 & 0 & 0 & 21 & 4 & & \hookleftarrow + \\
\hline
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\
0 & 2 & -1 & 2 & -1 & & \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} & & \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & & \\
\hline
\end{array}$$

Damit ist die Determinante $\det A = -8$.

2.Möglichkeit: Entwicklung nach 1. Zeile:

$$\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \left[(-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \\
&+ 1 \left[(-2) \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \\
&= 2 \cdot [(-1) \cdot (-3) + (-1) \cdot 4] + 1 \cdot [(-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-3)] = -8.
\end{aligned}$$

3.Möglichkeit: Entwicklung nach 1. Spalte:

$$\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \left[(-1) \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \right] \\
&+ 2 \left[(-1) \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right] - 2 \left[(-1) \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \\
&= 2 \cdot [(-1) \cdot (-3) + (-1) \cdot 4] + 2 \cdot [(-1) \cdot 0] - 2 \cdot [(-1)(-3)] = -8.
\end{aligned}$$