Klausur zum Modul Ingenieurmathematik I (B21) **11. September 2013**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können insgesamt 110 Punkte erreicht werden.
Zum Bestehen sind mindestens 45 Punkte erforderlich.

Prüfer: Prof. Dr. Martin Rumpf, Dr. Martin Lenz

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nummer einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen.

Schlüsselwort: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10
Aufgabe	7	8	9	10	11	$\sum$
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/110

Note: Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Zeigen Sie:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für $n \in \mathbb{N}$. *(4 Punkte)*

b) $2^n \leq n!$ für $n \geq 4$. *(3 Punkte)*

c) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ konvergiert. *(3 Punkte)*

LÖSUNG:

a) $n = 1:$ $$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 \quad \checkmark$$

$n \to n+1:$ $$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2\cdot(n+1) - 1 \overset{\text{I.A.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

b) $n = 4:$ $$2^4 = 16 \leq 24 = 4! \quad \checkmark$$

$n \to n+1:$ $$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{I.A.}}{\leq} n! \cdot 2 \leq n! \cdot (n+1) = (n+1)!$$

c) Z.B. mit dem Quotientenkriterium:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{2^k} = \frac{2}{k+1} \leq \frac{2}{3} < 1 \quad \forall\, k \geq 2$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + px + q, \;\; p, q \in \mathbb{R}$ *(1 Punkt)*

b) $g(s) = \sqrt{4 + s^2}$ *(3 Punkte)*

c) $h(u) = \frac{\sin(u)}{2+\cos^2(u)}$ *(3 Punkte)*

d) $k(y) = 2ye^{-y^2}$ *(3 Punkte)*

LÖSUNG:

a) $f'(x) = 2x + p$

b) $g'(s) = \frac{1}{2}\frac{2s}{\sqrt{4+s^2}} = \frac{s}{\sqrt{4+s^2}}$

c) $h'(u) = \frac{\cos(u)(2+\cos^2(u)) - \sin(u) 2\cos(u)(-\sin(u))}{(2+\cos^2(u))^2} = \frac{\cos(u)(2+\cos^2(u)+2\sin^2(u))}{(2+\cos^2(u))^2} = \frac{\cos(u)(3+\sin^2(u))}{(2+\cos^2(u))^2}$

d) $k'(y) = 2e^{-y^2} + 2ye^{-y^2}(-2y) = e^{-y^2}(2 - 4y^2)$

Aufgabe 3: a) Betrachten Sie die reelle Funktion *(5 Punkte)*

$$g(x) = \frac{\sin^3(x)}{1 - \cos^2(x)}.$$

i) Für welche Werte von x ist die Funktion nicht definiert?

ii) Kann die Funktion an diesen Stellen stetig ergänzt werden? Wenn ja, durch welche Werte? Wenn nein, warum nicht?

b) Betrachten Sie die reelle Funktion *(5 Punkte)*

$$f(x) = \frac{4 - 2x}{x^2 - 3x + 2}.$$

i) Für welche Werte von x ist die Funktion nicht definiert?

ii) Kann die Funktion an diesen Stellen stetig ergänzt werden? Wenn ja, durch welche Werte? Wenn nein, warum nicht?

LÖSUNG:

a) i) Nicht definiert, wenn der Zähler 0 wird, also:

$$1 - \cos^2(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm 1 \Leftrightarrow x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

ii) Es ist (für $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$)

$$g(x) = \frac{\sin^3(x)}{\sin^2(x)} = \sin(x)$$

Also kann g an $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ mit $\sin(x) = 0$ ergänzt werden.

b) i) Nicht definiert, wenn der Zähler 0 wird, also:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ oder } x = 1$$

ii) Es ist (für $x \neq 2$)

$$f(x) = \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{-2}{x-1}$$

Nicht stetig ergänzbar, da der Limes von links $+\infty$ und von rechts $-\infty$ ist.

Aufgabe 4: Betrachten Sie die reelle Funktion

$$f(x) = \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right) x^3 .$$

a) Bestimmen Sie die Menge der Nullstellen von $f(x)$. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie Kandidaten für lokale Extrempunkte von $f(x)$ und die Funktionswerte an diesen Stellen. *(3 Punkte)*

c) Bestimmen Sie weiterhin, ob es sich bei diesen Punkten um ein Minimum, Maximum oder einen Wendepunkt handelt. *(3 Punkte)*

d) Wie verhält sich $f(x)$ im Unendlichen, d.h. für $x \to \pm\infty$? *(1 Punkt)*

e) Skizzieren Sie die Funktion. *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a) Bestimmung der Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

($\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$)

b) Notwendige Bedingung für Extrempunkte ist eine Nullstelle der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)(-3x)x^3 + \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)3x^2 \\ &= \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)(-3x^4 + 3x^2) = \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)3x^2(1-x^2) \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow 3x^2(1-x)(1+x) = 0 \end{aligned}$$

Also sind $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ potentielle Extrempunkte mit folgenden Funktionswerten:

$$f(-1) = -\exp\left(-\tfrac{3}{2}\right), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = \exp\left(-\tfrac{3}{2}\right)$$

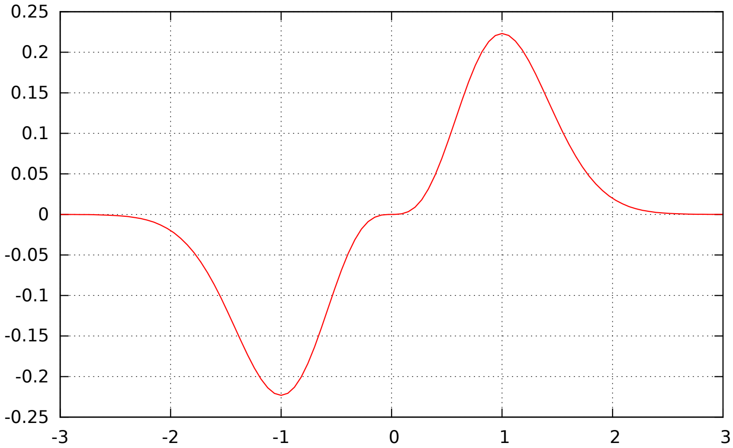
c) Wir verwenden die zweite Ableitung um Maxima und Minima zu bestimmen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)(-3x)(-3x^4 + 3x^2) + \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)(-12x^3 + 6x) \\ &= \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)(9x^5 - 21x^3 + 6x) \\ f''(-1) &= \exp\left(-\tfrac{3}{2}\right)\cdot 6 > 0 \Rightarrow \text{ Minimum} \\ f''(1) &= \exp\left(-\tfrac{3}{2}\right)\cdot(-6) < 0 \Rightarrow \text{ Maximum} \\ f''(0) &= 0 \Rightarrow \text{ unklar!} \end{aligned}$$

An $x = 0$ kann aber weder ein Minimum noch ein Maximum liegen, da die Funktion punktsymmetrisch ist ($\exp(-\frac{3}{2}x^2)$ ist wegen x^2 symmetrisch, x^3 ist punktsymmetrisch, also ist das Produkt punktsymmetrisch). Folglich befindet sich an $x = 0$ ein Wendepunkt.
(Alternativ: Die erste Ableitung besitzt sowohl links als auch rechts von 0 ein positives Vorzeichen, da $\exp(-\frac{3}{2}x^2)$ immer positiv ist, $3x^2 > 0$ für $x \neq 0$ und $1-x^2 > 0$ für $|x| < 1$.)

d) Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. ($\exp(-\frac{3}{2}x^2) = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}x^2}}$ und in diesem Bruch wächst der Nenner für $x \to \pm\infty$ monoton und unbeschränkt an.)

e)



Aufgabe 5: Betrachten Sie die Funktion $f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$$

a) Bestimmen Sie die Niveaumenge zum Wert Null, d.h. die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Werte von f und $\operatorname{grad} f$ an den Punkten $(k\frac{\pi}{2}, l\frac{\pi}{2})$ für $k, l = 0, 1, 2$. *(2 Punkte)*

d) Skizzieren Sie die Null-Niveaumenge und zeichnen Sie die Richtung des Gradienten an den oben gegebenen Punkten ein sofern er nicht Null ist. *(4 Punkte)*

LÖSUNG:

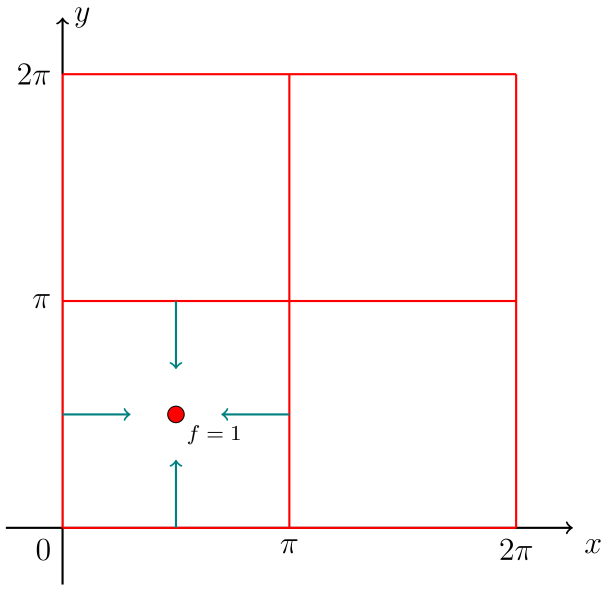
a) $\{(x, y)|x = 0 \text{ oder } x = \pi \text{ oder } x = 2\pi \text{ oder } y = 0 \text{ oder } y = \pi \text{ oder } y = 2\pi\}$

b)
$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

c) $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1$ und an allen anderen Punkten 0.

$$\operatorname{grad} f(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{grad} f(k\tfrac{\pi}{2}, l\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k, l = 0, 2$$
$$\operatorname{grad} f(\tfrac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{grad} f(\pi, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{grad} f(\tfrac{\pi}{2}, \pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{grad} f(0, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d)


y
2π
π
$f = 1$
0
π
2π
x

Aufgabe 6: Betrachten Sie die Punkte:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie die Ebene E, welche die 3 Punkte enthält. *(2 Punkte)*

b) Welchen Abstand hat diese Ebene vom Ursprung? *(5 Punkte)*

c) Handelt es sich bei E um einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$?
Begründen Sie Ihre Antwort! *(1 Punkt)*

d) Handelt es sich bei E um einen affinen Unterraum des $\mathbb{R}^3$?
Begründen Sie Ihre Antwort! *(1 Punkt)*

e) Geben Sie eine zu E parallele Ebene an, die den Ursprung enthält.
(1 Punkt)

LÖSUNG:

a) Wir betrachten P_0 als Ortsvektor (Stützvektor) und bestimmen die Richtungen der Ebene durch:

$$P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Parameterdarstellung:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Mit Hilfe der Richtungsvektoren berechnen wir eine Normalenrichtung:

$$n = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Normiert:

$$\frac{n}{\|n\|} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für P_0 (als ein Punkt der Ebene) gilt:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} = \frac{6}{7}.$$

Damit ist die Normalendarstellung gegeben durch:

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} \cdot x = \frac{6}{7}.$$

Insbesondere ist damit der Abstand vom Ursprung $\frac{6}{7}$.

c) Nein, denn der Nullvektor ist nicht enhalten.

d) Ja, der Nullvektor ist enhalten und für zwei Vektoren x, y in E und einen Faktor $a \in \mathbb{R}$ sind auch $x + y$ sowie ax wieder in E.

e) In der Parameterdarstellung wird der Stützvektor weggelassen:

$$x = t\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Bei der Normalenform ist der oben berechnete Abstand durch 0 zu ersetzen:

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} \cdot x = 0$$

Aufgabe 7: a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix *(6 Punkte)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & -6 & 7 \\ 3 & -8 & 11 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie $\det(A)$. *(1 Punkt)*

ii) Berechnen Sie $\mathrm{Ker}(A)$. *(1 Punkt)*

iii) Berechnen Sie $\mathrm{Bild}(A)$. *(1 Punkt)*

iv) Berechnen Sie $\mathrm{Rang}(A)$. *(1 Punkt)*

LÖSUNG:

a) Gauß-Elimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & -6 & 6 \\ 3 & -8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \hookleftarrow + & \\ & \hookleftarrow + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \hookleftarrow + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) i) Nach der Produktregel für Determinanten gilt:

$$\det(A) = \det(LR) = \det(L)\det(R) = (1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) = 6$$

ii) Da R als Resultat der Gauß-Elimination keine Nullzeile enthält, ist $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

iii) Wegen $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ muss $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$ gelten.

iv) Entsprechend ist $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

Aufgabe 8: a) Zeigen Sie: Für drei beliebige Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt stets *(4 Punkte)*

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{pmatrix} = (a \times b) \cdot c\,.$$

b) Berechnen Sie Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten *(3 Punkte)*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die Determinante der Matrix *(3 Punkte)*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

a) Entwicklung nach 3. Spalte ergibt (siehe auch Skript):

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{pmatrix} &= c_1 (\underbrace{a_2 b_3 - a_3 b_2}_{(a\wedge b)_1}) + c_2 \underbrace{(-1)(a_1 b_3 - a_3 b_1)}_{(a\wedge b)_2} + c_3 (\underbrace{a_1 b_2 - a_2 b_1}_{(a\wedge b)_3}) \\ &= c \cdot (a \wedge b) \end{aligned}$$

b) Das Dreieck wird durch die Vektoren $(1, 3)$ und $(4, 6)$ aufgespannt. Die Determinante der Matrix mit diesen Vektoren als Zeilen ergibt den Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms, also das Doppelte der gesuchten Fläche A.

$$A = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |1 \cdot 6 - 3 \cdot 4| = 3$$

c) Mit 3 Zeilenvertauschungen ergibt sich die Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Lsh & & \\ | & \Lsh & \\ | & | & \Lsh \\ | & | & \hookleftarrow \\ | & \hookleftarrow & \\ \hookleftarrow & & \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt $\det(P) = (-1)^3 \det(\mathbb{1}) = -1$.

Alternativ:

- Entwicklung nach Zeilen oder Spalten führt jeweils zu nur einer kleineren Matrix gleicher Struktur. Bei der Entwicklung sind die Vorfaktoren $(-1)^{i+j}$ zu beachten $(1+6=7, 1+5=6, 1+4=5, 1+3=4, 1+2=3)$, die zu 3 Vorzeichenwechseln führen und somit das Ergebnis -1 liefern.
- Gauß-Elimination benötigt ebenfalls 3 Zeilenvertauschungen (und keine weiteren Operationen).

Aufgabe 9: Betrachten Sie die folgende Kurve im $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \cos(3t) \\ \sin(t) - \sin(3t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi) .$$

a) Berechnen Sie $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Funktionswerte von $\gamma(t)$ und $\dot{\gamma}(t)$ für $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$. (2 Punkte)

c) Zeichnen Sie die Kurve.
Zeichnen Sie auch die Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\gamma}(t)$ ein. (3 Punkte)

d) Bestimmen Sie alle Parameter $s, t \in [0, 2\pi)$, $s \neq t$ für die gilt $\gamma(s) = \gamma(t)$. (1 Punkte)

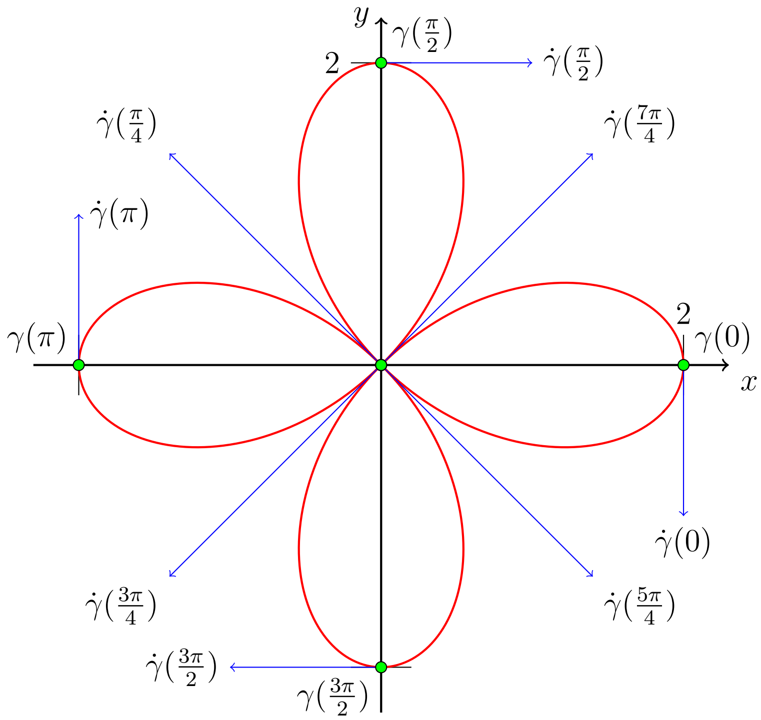
e) Berechnen Sie den Winkel der Tangenten (Schnittwinkel) für aufeinander folgende Durchläufe des Schnittpunktes. (2 Punkte)

LÖSUNG:

a)
$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) - \sin(3t)3 \\ \cos(t) - \cos(3t)3 \end{pmatrix}$$

b)
- $t = 0:$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$
- $t = \frac{\pi}{4}:$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$
- $t = \frac{\pi}{2}:$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$
- $t = \frac{3\pi}{4}:$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$
- $t = \pi:$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$
- $t = \frac{5\pi}{4}:$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$
- $t = \frac{3\pi}{2}:$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$
- $t = \frac{7\pi}{4}:$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

c)



d) Für $s, t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$, $s \neq t$ gilt: $\gamma(s) = \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) Für den Schnittwinkel α gilt (mit $s \neq t$):

$$\cos(\alpha) = \frac{\dot\gamma(s) \cdot \dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(s)| \cdot |\dot\gamma(t)|}.$$

Bei aufeinander folgenden Durchläufen des Schnittpunktes ändert sich jeweils das Vorzeichen einer Komponente der Tangente (siehe die Werte bei Teil b)). Das Skalarprodukt ist somit immer 0, die Tangenten stehen senkrecht aufeinander. Alternativ: explizite Werte einsetzen.

Aufgabe 10: Betrachten Sie eine Ebene E durch den Ursprung, die durch die beiden Richtungsvektoren $(1, 2, 3)$ und $(5, 6, 7)$ aufgespannt wird.

a) Stellen Sie die Matrix S auf, die eine Spiegelung an E beschreibt. *(2 Punkte)*

b) Geben Sie Bild(S) an. *(2 Punkte)*

c) Geben Sie S^2 an. *(1 Punkt)*

d) Stellen Sie die Matrix P auf, die eine Projektion auf E beschreibt. *(2 Punkte)*

e) Geben Sie Bild(P) an. *(2 Punkte)*

f) Geben Sie P^2 an. *(1 Punkt)*

LÖSUNG: Mit Hilfe der Richtungsvektoren berechnen wir eine Normalenrichtung:

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\8\\-4\end{pmatrix}$$

Normiert:

$$n = \frac{1}{\sqrt{96}}\begin{pmatrix}-4\\8\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-4\\8\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

a) $S = \mathbb{1} - 2nn^T$, explizit:

$$S = \mathbb{1} - 2\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\-2 & 4 & -2\\1 & -2 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(3\mathbb{1} - \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\-2 & 4 & -2\\1 & -2 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\2 & -1 & 2\\-1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

b) Bild$(S) = \mathbb{R}^3$, denn zu jedem Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ kann man einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ finden, so dass $y = Sx$. (x ist gerade das Spiegelbild von y.)
Alternativ: Gauß-Elimination auf den Spalten.

c) $S^2 = (\mathbb{1} - 2nn^T)(\mathbb{1} - 2nn^T) = \mathbb{1} - 4nn^T + 4nn^Tnn^T = \mathbb{1}$
Alternativ: Matrizenmultiplikation.

d) $P = \mathbb{1} - nn^T$, explizit:

$$P = \mathbb{1} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\-2 & 4 & -2\\1 & -2 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\left(6\mathbb{1} - \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\-2 & 4 & -2\\1 & -2 & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\2 & 2 & 2\\-1 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

e) $\text{Bild}(P) = E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot n = 0\}$ (Bei einer Projektion wird jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ auf einen Punkt der Ebene abgebildet. Außerdem hat jeder Punkt der Ebene sich selbst als Urbild.)
Alternativ: Gauß-Elimination auf den Spalten.

f) $P^2 = (\mathbb{1} - nn^T)(\mathbb{1} - nn^T) = \mathbb{1} - 2nn^T + nn^T nn^T = \mathbb{1} - nn^T = P$
Alternativ: Matrizenmultiplikation.

Aufgabe 11: a) Kann man die in i) und ii) angegebenen Mengen zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzen?
Falls ja, führen Sie diese Ergänzung durch. Falls nein, warum nicht? *(3 Punkte)*

i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) Kann man aus den Mengen in i) und ii) durch Wegstreichen von Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden?
Falls ja, wie? Falls nein, warum nicht? *(3 Punkte)*

i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

c) Geben Sie 2 verschiedene Vektorräume der Dimension 1 mit jeweils einer zugehörigen Basis an. *(2 Punkte)*

d) Geben Sie 2 verschiedene Vektorräume der Dimension 2 mit jeweils einer zugehörigen Basis an. *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a) i) Nein, da die gegebenen Vektoren schon linear abhängig sind.

ii) Ja, z. B. durch das Kreuzprodukt $(-1, 1, 0)$ oder einen anderen linear unabhängigen Vektor.

b) i) Nein, die gegebenen Vektoren sind paarweise linear abhängig.

ii) Ja, streiche den ersten oder den dritten, da diese linear abhängig von einander sind.

c) (Unter-)vektorräume des $\mathbb{R}^n$ mit Basis $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Geraden).

d) (Unter-)vektorräume des $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ mit Basis $x, y \in \mathbb{R}^n$ und x, y linear unabhängig (Ebenen), Polynome in x vom Grad ≤ 1 mit Basis $1, x$.