Aufgabe 10:

a) Skizzieren Sie zuerst den Graphen der folgenden Funktion, und schreiben Sie die Funktion ohne Betragsfunktion mit Fallunterscheidung:

$$f(x) := x + |x|$$

b) Skizzieren Sie nun den Graph der Funktion

$$g(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & : \quad x > 1 \end{cases}$$

und schreiben Sie die Funktion unter Verwendung der Betragsfunktion ohne Fallunterscheidung.

c) Skizzieren Sie den Graphen der folgenden Funktion, und schreiben Sie auch diese unter Verwendung der Betragsfunktion ohne Fallunterscheidung:

$$h(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x < -1 \\ 2x+2 & : \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 2 & : \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 11:

a) Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Berechnen Sie die ersten Folgenglieder und stellen Sie dann eine Hypothese für eine direkte Formel zur Berechnung von a_n auf.

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$;

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

d) $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \geq 4$.

Aufgabe 12: Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n := \frac{-7n^2+3n-1}{5n^2+5}$;

b) $a_n := \frac{3n^3+n-2}{(2n+\sqrt{n})^3}$;

c) $a_n := (1 + \frac{1}{n^2})^n$;

Tipp: Berechnen Sie a_{100} und a_{1000} (mit dem Taschenrechner) um den Grenzwert zu raten. Wenden Sie die Bernoullische Ungleichung einmal auf a_n und einmal auf $\frac{1}{a_n}$ an und zeigen Sie dadurch

$$a_n \geq 1 + \frac{1}{n}\,; \quad a_n \leq 1 + \frac{n}{n^2 - n + 1}.$$

Berechnen Sie die Grenzwerte dieser beiden Folgen.

d) $a_n := \sqrt[n]{a}$, für $a > 1$.

Tipp: Definieren Sie h und h_n durch

$$a = 1 + h\,, \quad a_n = 1 + h_n$$

und wenden Sie die Bernoullische Ungleichung an!

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

`http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ws12/ingmath1/`