Aufgabe 13: Zeigen Sie, dass die Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ für alle $0 \le x \le 1$ konvergiert.
Tipp: Vergleichen Sie mit der Folge $g_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ und verwenden Sie die Eigenschaft monotoner Folgen.
Bemerkung: Später werden Sie erkennen, daß die zugehörige Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und die Exponentialfunktion e^x darstellt.

Aufgabe 14: Welche Aussagen sind richtig?

a) Jede beschränkte Folge ist konvergent. ja ☐ nein ☐

b) Jede konvergente Folge ist beschränkt. ja ☐ nein ☐

c) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt. ja ☐ nein ☐

d) Aus der Konvergenz von (a_n) folgt die Konvergenz von $|a_n|$. ja ☐ nein ☐

e) Ist (a_n) beschränkt und gilt $a_n > 0$, dann ist $(1/a_n)$ beschränkt. ja ☐ nein ☐

f) Die Folge (a_n) sei monoton wachsend und (b_n) monoton fallend, und es gelte für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n \le b_n$. Dann sind (a_n) und (b_n) konvergent. ja ☐ nein ☐

g) Die Folgen (a_n) und (b_n) seien monoton wachsend. Dann ist $(a_n + b_n)$ monoton wachsend. ja ☐ nein ☐

h) Die Folgen (a_n) und (b_n) seien monoton wachsend. Dann ist $(a_n \cdot b_n)$ monoton wachsend. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 15: Sind die folgenden Funktionen stetig auf ihrem Definitionsgebiet?

a) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) x^2 & \text{, auf } \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$

c) $f(x) = |x-1| + |x+1|$ auf $\mathbb{R}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{|x|}$ auf $\mathbb{R}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 1 & , x \le 2 \\ -\frac{x^3}{4} + 3 & , x > 2 \end{cases}$ auf $\mathbb{R}$

Aufgabe 16: $(f_n)_n$ sei rekursiv definiert durch $f_1 = a$, $f_{n+1} = a + f_n^2$ mit $a = \frac{3}{16}$. Wir wollen nun den Grenzwert bestimmen. Dazu gehen wir wie folgt vor.

a) Man berechne die ersten fünf Folgenglieder.

b) Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass sie durch $\frac{1}{4}$ nach oben beschränkt ist.

c) Man zeige, dass diese Folge monoton wachsend ist.
Tipp: Zeigen Sie $f_{n+1} - f_n > 0$.

d) Man zeige, dass f_n einen Grenzwert besitzt und berechne diesen.

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

`http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ws12/ingmath1/`