

Aufgabe 25: Berechnen Sie den Gradienten

$$\nabla f(u, v, w) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v, w), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v, w), \frac{\partial f}{\partial w}(u, v, w) \right)$$

der Funktion

$$f(u, v, w) = \sqrt{(u-1)^2 + (v-3)^2 + (w-5)^2}.$$

Welche Flächen ergeben sich für $R > 0$ als Niveaumengen

$$\{(u, v, w) \mid f(u, v, w) = R\} ?$$

Aufgabe 26: Zeigen Sie, dass gilt:

- a) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
 - b) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$,
- und $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Tipp: Vergleichen Sie hierzu die Herleitung der Formel $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ aus der Vorlesung! Betrachten Sie beide Gleichungen in Teil b) gemeinsam und verwenden Sie: Gilt für zwei Funktionen $g(x)$ und $h(x)$: $g(x)^2 + h(x)^2 = 0$, dann folgt $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$.

Aufgabe 27: Die Sinus-Funktion ist gegeben durch die Reihe

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Beweisen Sie, dass diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Benutzen Sie für den Beweis das Quotientenkriterium.

Aufgabe 28: Eine Gerade in \mathbb{R}^3 ist (analog zum \mathbb{R}^2) gegeben durch einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ und einen Richtungsvektor $r \in \mathbb{R}^3$, $r \neq 0$ mittels

$$G = \{x + \alpha r \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

- a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, um den Schnitt von G mit einer Ebene

$$E = \{y + \beta p + \gamma q \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

für $y, p, q \in \mathbb{R}^3$, p und q linear unabhängig, zu berechnen.

- b) Welche Fälle können hierbei auftreten?

- c) Berechnen Sie den Schnitt von

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Welcher Fall aus b) ist das?

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

<http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ws12/ingmath1/>