Aufgabe 37: Welche der folgenden Abbildungen ist linear? Gegeben Sie gegebenfalls die dazugehörige Matrixdarstellung an:

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y-3 \\ y+1 \end{pmatrix}$,

b) $g(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix}$,

c) $h(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}$.

Aufgabe 38:

a) Bestimmen Sie das Bild von (x,y) unter Spiegelung an der y-Achse und unter Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden (d.h. an der Geraden $\{\alpha\binom{1}{1} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$).

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der in a) beschriebenen Abbildungen.

c) Berechnen Sie das Produkt der Matrizen aus b). Welche Abbilung wird durch c) beschrieben (vergleichen Sie die Vorlesung).

Aufgabe 39: Betrachten Sie die Abbildung

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie des Weiteren die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie die Matrixdarstellung von f bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3 an.

Aufgabe 40: Betrachten Sie die Erde als Kugel mit Radius r um den Ursprung. Nehmen Sie an, der Äquator liege in der x-y-Ebene, der Nullmeridian in der x-z-Ebene (mit $x > 0$), und der Nordpol auf der positiven z-Achse.

a) Geben Sie die Koordinaten des Nordpols P an.

b) Angenommen, die geographische Breite werde durch einen Winkel $\theta \in [0, \pi]$ (0 für den Nordpol, $\pi/2$ (bzw. 90°) für den Äquator, π (bzw. 180°) für den Südpol) beschrieben. Betrachten Sie den Punkt Q, der auf dem Nullmeridian liegt und (in diesem Sinne) Breite θ hat. Geben Sie die Matrixdarstellung der Drehung an, die P auf Q abbildet. Berechnen Sie mittels des Matrix-Vektor-Produkts die Koordinaten von Q.

c) Angenommen, die geographische Länge werde durch einen Winkel $\phi \in (-\pi, \pi]$ (0 für den Nullmeridian, positive Winkel für östliche Länge, d.h. für $y > 0$) beschrieben. Betrachten Sie den Punkt R, der auf dem selben Breitenkreis wie Q liegt und (in diesem Sinne) Länge ϕ hat. Geben Sie die Matrixdarstellung der Drehung an, die Q auf R abbildet. Berechnen Sie mittels des Matrix-Vektor-Produkts die Koordinaten von R.

d) Geben Sie die Matrixdarstellung der Verkettung der beiden Drehungen an. Berechnen Sie das Matrix-Vektor-Produkt dieser Matrix mit dem Vektor P. Welcher Punkt ergibt sich?

Tipp: Eine Skizze kann hilfreich sein. Achten Sie darauf, dass die Drehwinkel das richtige Vorzeichen haben!

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

`http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ws12/ingmath1/`