

Aufgabe 53: Gegeben sind die Funktionen

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

b) $g(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2$

Zeichnen Sie die 1-Niveaulinie. Berechnen Sie die Gradienten der Funktionen an den vier Stellen der Form $(x_1, 0)$, $(0, x_2)$ und an den vier Stellen der Form (x_1, x_1) , $(x_1, -x_1)$. Skizzieren Sie jeweils die 8 Gradienten als Vektoren, die in den zugehörigen Punkten starten.

- Aufgabe 54:**
- a) Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ richtungsdifferenzierbar in allen Richtungen $x_i, i = 1, \dots, n$ ist, dann ist f total differenzierbar.
ja nein
- b) Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, dann ist f richtungsdifferenzierbar in allen Richtungen $x_i, i = 1, \dots, n$.
ja nein
- c) Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, dann ist die Jacobimatrix $A \in \mathbb{R}^{n,1}$ ein Spaltenvektor.
ja nein
- d) Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, dann ist die Jacobimatrix $A \in \mathbb{R}^{1,n}$ ein Zeilenvektor.
ja nein
- e) Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, dann ist die Jacobimatrix $A = 0$.
ja nein
- f) Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, dann enthält die Jacobimatrix die partiellen Ableitungen.
ja nein
- g) Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, dann steht in der Jacobimatrix an einer Stelle h und an allen anderen 0.
ja nein

Aufgabe 55: Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &:= \max(|x_1|, |x_2|) \\ &= \frac{1}{2}(|x_1| + |x_2| + ||x_1| - |x_2||) \quad \text{und} \\ g(x_1, x_2) &:= |x_1| + |x_2|. \end{aligned}$$

a) Bestimmen und beschreiben Sie die Niveaumengen

$$\begin{aligned} N_r(f) &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = r\} \quad \text{und} \\ N_r(g) &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1, x_2) = r\}. \end{aligned}$$

Fertigen Sie auch eine Skizze einiger Niveaumengen an.

b) Bestimmen und beschreiben Sie den Graphen der Funktionen f und g . Skizzieren Sie die Graphen ebenfalls.

c) In welchen Punkten sind die Funktionen f, g differenzierbar bzw. in welchen Punkten sind sie nicht differenzierbar?

Tipp: Man kann dies anhand des jeweiligen Graphen erkennen!

Aufgabe 56: Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinante der Abbildung $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(r, \vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

<http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ws12/ingmath1/>