Klausur zum Modul Ingenieurmathematik II (B02) **26. März 2013**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können insgesamt 90 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind mindestens 45 Punkte erforderlich.

Prüfer: Prof. Dr. M. Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen:

Schlüsselwort: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Punkte:	9	4	8	8	10	16
Aufgabe:	7	8	9	10	11	$\sum$
Punkte:	7	9	9	6	4	90

Gesamtzahl der Punkte:

Note:

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Integral *(3 Punkte)*

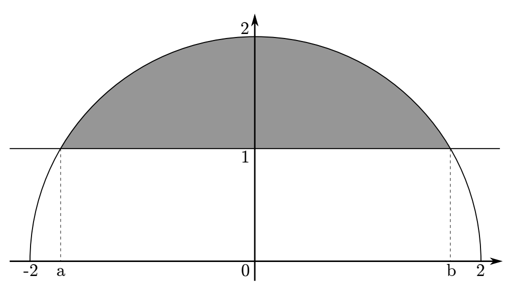
$$\int_1^3 \ln(3x-2)dx.$$

b) Ermitteln Sie die Werte von a und b der Funktion $\sqrt{4-x^2}$ aus der Zeichnung (s. unten) und berechnen Sie danach das Integral

$$\int_a^b \sqrt{4-x^2}dx \qquad \left(= \int_a^b 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx\right)$$

mittels Substitution. Benutzen Sie das Ergebnis, um den Flächeninhalt der grauen Fläche (s. unten) zu berechnen. **Hinweis:** Es genügt bei beiden Rechnungen, das Ergebnis in der Form $[f(t)]_c^d$ für geeignete c und d anzugeben. Sie dürfen ohne Beweis die folgende Gleichung benutzen: *(4 Punkte)*

$$\left(\frac{1}{2}\left(x+\sin(x)\cos(x)\right)\right)' = \cos(x)^2.$$



c) Geben Sie die Formel für die partielle Integration in mehreren Dimensionen, die aus dem Satz von Gauß abgeleitet ist, an. *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = -2\cos(\pi x)$ auf dem Intervall $[0,1]$ sowie die Basispunkte $x_0 = x_1 = 0$ und $x_2 = x_3 = 1$. Weiterhin gelte für die Hermite-Basisfunktionen h_1, h_2, h_3 und h_4:

$$\begin{array}{llll} h_1(0) = 0 & h_1'(0) = 0 & h_1(1) = 0 & h_1'(1) = 1 \\ h_2(0) = 0 & h_2'(0) = 0 & h_2(1) = 1 & h_2'(1) = 0 \\ h_3(0) = 0 & h_3'(0) = 1 & h_3(1) = 0 & h_3'(1) = 0 \\ h_4(0) = 1 & h_4'(0) = 0 & h_4(1) = 0 & h_4'(1) = 0 \end{array}$$

Wie lautet die Hermite-Interpolation von f bezüglich der obigen Basispunkte unter Verwendung der Hermite-Basisfunktionen h_1, h_2, h_3 und h_4? *(2 Punkte)*

b) Es seien die paarweise verschiedenen Stützstellen

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

gegeben. Welche Forderungen müssen Lagrange-Polynome bezüglich dieser Stützstellen erfüllen? Geben Sie außerdem die allgemeine Darstellung für Lagrange-Polynome an. *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

a) Geben Sie den Transformationssatz der Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ an. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie mit Hilfe von Teil a) das Volumen der Menge

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -4 \leq x \leq 4, 1 \leq y^2 + z^2 \leq 9\right\}.$$

(3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Fläche der Menge

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid cx^2 + dy^2 \leq 1\}$$

mit $c, d > 0$. *(3 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid cx^2 + dy^2 \leq 1\}$

Aufgabe 4: *(8 Punkte)* Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ für $m > n \geq 1$. Das Ausgleichsproblem ist

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} \|Az - b\|^2 .$$

a) Wie lautet die Normalengleichung? Zeigen Sie, dass die Normalengleichung eine notwendige Bedingung für die Lösung des Ausgleichsproblems darstellt. *(3 Punkte)*

b) Finden Sie die Gleichung der Regressionsgeraden $\alpha + \beta x_i$ für

$$z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

mittels der Normalengleichung für die unten angegebenen Messpunkte ("Methode der kleinsten Quadrate"). *(2 Punkte)*

c) Lösen Sie das Regressionsproblem aus b) mittels QR-Zerlegung **ohne** Zuhilfenahme der Normalengleichung (Q muss nicht notwendigerweise angegeben werden). *(3 Punkte)*

x_i	-10	-3	6	9
y_i	-5	-1	2	8

LÖSUNG:

a)

b)

x_i	-10	-3	6	9
y_i	-5	-1	2	8

c)

Aufgabe 5: *(10 Punkte)*

a) Definieren Sie die Begriffe "Eigenwert" und "Eigenvektor" einer $n \times n$ Matrix. *(2 Punkte)*

b) Definieren Sie, wann eine $n \times n$ Matrix diagonalisierbar ist. Wie liest man am Ergebnis der Diagonalisierung die Eigenwerte und Eigenvektoren ab? *(3 Punkte)*

c) Diagonalisieren Sie die Matrix *(3 Punkte)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Benutzen Sie das Ergebnis aus c), um A^5 zu berechnen. *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

d)

Aufgabe 6: *(16 Punkte)*

a) Geben Sie die Regel für die Multiplikation der komplexen Zahlen $x_1 + iy_1$ und $x_2 + iy_2$ an. *(2 Punkte)*

b) Wie lautet die Darstellung von $re^{i\theta}$ (geometrische Form) in der Form $x + iy$? *(2 Punkte)*

c) Wandeln Sie die Zahl $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ in die geometrische Form aus b) um. Zeigen Sie, wie man damit z^7 berechnet. *(3 Punkte)*

d) Bestimmen Sie die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 + (i - 5)z + (6 + 2i) = 0.$$

(3 Punkte)

e) Beweisen Sie die Darstellung

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

mittels der Reihendarstellung der komplexen Exponentialfunktion und des reellen Kosinus und Sinus. *(3 Punkte)*

f) Weisen Sie das Doppelwinkeltheorem des Kosinus

$$\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1$$

direkt unter Verwendung der Darstellung $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ nach. *(3 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

d) $z^2 + (i-5)z + (6+2i) = 0$

e)

f)

Aufgabe 7: *(7 Punkte)* Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied $O(\|\cdot\|^3)$) für folgende Funktionen an:

a) *Eindimensionale Taylorentwicklung*:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)^2$ um den Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ *(3 Punkte)*

b) *Zweidimensionale Taylorentwicklung*:
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x)^2 \cos(y^2)$ um den Entwicklungspunkt

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(4 Punkte)

LÖSUNG:

a)

Seite 16

b)

Aufgabe 8: *(9 Punkte)* Betrachten Sie für $a > 0$ folgende Kurve:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\cos(t))^3 \\ a(\sin(t))^3 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Länge von γ über dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$. *(3 Punkte)*

b) Sei $a = 1$. Berechnen Sie für $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \qquad \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

Skizzieren Sie $\gamma(t)$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (benutzen Sie dabei das Koordinatensystem auf der Rückseite). **Tipp**: Benutzen Sie hierfür die obigen Grenzwerte und überlegen Sie sich, welche Werte $\gamma(t)$ bei $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2}$ annimmt. *(4 Punkte)*

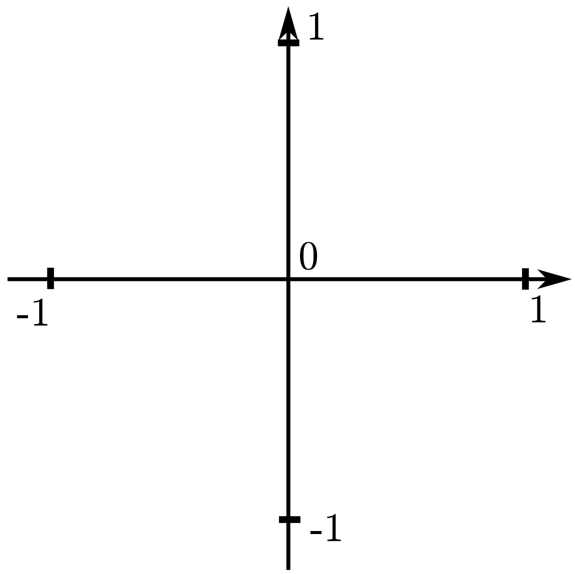
c) Sei $a = 1$. Zeigen Sie

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(\pi - t) \\ \gamma_2(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie diese Symmetrie und vervollständigen Sie die Skizze aus b) für $t \in [0, \pi]$. *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a)



b)

c)

Aufgabe 9: *(9 Punkte)*

a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{r}(t) = \frac{1}{5} t\, r(t) \text{ mit dem Anfangswert } r(0) = r_0 > 0.$$

(3 Punkte)

b) Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)).$$

Geben Sie zu einem Zeitschritt $\tau > 0$ das Cauchy-Euler-Verfahren an. Wenden Sie dieses dann auf das Anfangswertproblem aus Teilaufgabe a) an. *(4 Punkte)*

c) Von welcher Konvergenzordnung ist dieses Verfahren für eine stetig differenzierbare Funktion f und was bedeutet dies für den Approximationsfehler? *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

c)

Aufgabe 10: *(6 Punkte)* Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^3 - y^2 - 5y - 3.$$

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f. *(3 Punkte)*

b) Welche dieser kritischen Punkte gehören zu (lokalen) Minima, (lokalen) Maxima oder Sattelpunkten? Begründen Sie Ihre Ergebnisse! *(3 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)

Aufgabe 11: *(4 Punkte)*

a) Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Kurve, die bogenlängenparametrisiert ist. Wie lautet dann die Formel für die Absolutkrümmung von γ? *(2 Punkte)*

b) Geben Sie die Parametrisierung einer Kurve an, deren Absolutkrümmung konstant 2 beträgt (die Kurve muss nicht notwendigerweise bogenlängenparametrisiert sein). *(2 Punkte)*

LÖSUNG:

a)

b)