Aufgabe 1: Geben Sie die Formel für die Integration einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über einer Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ an.

LÖSUNG:Die Formel für die Integration der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über eine stetige differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist.

$$\int_\gamma f dl = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Aufgabe 2: Geben Sie das Flächenelement bei der Integration über eine Graphenfläche $g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ an.

LÖSUNG:Laut Skript ist das Flächenelement bei der Integration über eine Graphenfläche $g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}.$$

Aufgabe 3: Geben Sie den Satz von Gauß an

a) einmal mit Differentialoperatoren und

b) und einmal mit ausgeschriebenen partiellen Ableitungen und ausgeschriebenem Skalarprodukt.

LÖSUNG:

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge und $\partial\Omega$ sein Rand, unter Voraussetzung daß es eine glatte Fläche ist; (in dem Sinn, daß der Rand $\partial\Omega$ eine lokale, Stetig differenzierbare Parametrisierung besitzt). Wir bezeichnen mit $N(x)$ die äußere Normale auf $\partial\Omega$, dann gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $V(x)$ auf $\overline{\Omega}$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(V(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} V(x) \cdot N(x) da$$

b) Die Gleichung ist explizit

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x) \right) dx = \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^n V_i(x) N_i(x) \right) da$$

wobei $V(x) = (V_1(x), V_2(x), \cdots, V_n(x))$ and $N(x) = (N_1(x), N_2(x), \cdots, N_n(x))$.

Aufgabe 4: Leiten Sie die Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers

$$K = \{(x,y,z) \,|\, z_0 \le z \le z_1,\ x^2 + y^2 \le f^2(z)\}$$

unter Verwendung von Zylinderkoordinaten her.

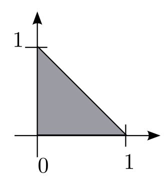
Lösung:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(K) &= \int_{z_0}^{z_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{f(z)} r\,dr\,d\varphi\,dz \\ &= 2\pi\int_{z_0}^{z_1}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{f(z)} dz \\ &= \pi\int_{z_0}^{z_1} f^2(z)\,dz\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Integrieren Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^2y^2$$

über das in der folgenden Zeichnung dargestellte Gebiet



Lösung:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{1-x} x^2y^2\,dydx &= \int_0^1 x^2\int_0^{1-x} y^2\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 x^2\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 x^2\frac{1}{3}(1-x)^3\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}x^2(1-x)^4\Big|_0^1 + \frac{2}{4}\int_0^1 x(1-x)^4\,dx\right) \\ &= \frac{2}{3\cdot 4}\int_0^1 x(1-x)^4\,dx \\ &= \frac{1}{3\cdot 2}\left(-\frac{1}{5}x(1-x)^5\Big|_0^1 + \frac{1}{5}\int_0^1 (1-x)^5\,dx\right) \\ &= -\frac{1}{3\cdot 2\cdot 5\cdot 6}(1-x)^6\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3\cdot 2\cdot 5\cdot 6} \\ &= \frac{1}{180}\end{aligned}$$

Alternativ kann man die Integration der Funktion $f(x,y)$ über das dargestellte Gebiet auch wie folgt ansetzen:

$$\int_0^1\int_0^{1-y} x^2y^2\,dx\,dy$$