Aufgabe 6: Betrachten Sie die folgenden Rotationen einer Sphäre S : Man drehe S um die y-Achse um den Winkel $\pi/2$, anschließend macht man dieselbe Operation um die z-Achse und rotiert zum Schluss nocheinmal um $\pi/2$ um die x-Achse.

a) Schreiben Sie die Matrix zu jeder Operation auf.

b) Geben Sie die Matrix von der gesamten Operation an.

c) Was hat man eigentlich getan?

LÖSUNG:

a) Sei

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$, f, g, und h die drei Transformationen (Abbildungen):

f sei die Rotation um die y-Achse, das heißt $f(e_2) = e_2$.

Der Rotationswinkel von f ist $\pi/2$, dadurch bekomen wir $f(e_3) = e_1$ und $f(e_1) = -e_3$.

Die Matrix von f ist dann

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

g sei die Rotation um die z-Achse und h die Rotation um die x-Achse. Durch die gleichen Überlegungen bekomen wir, dass die Matrizen zu diesen Abbildungen

$$M_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und

$$M_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

sind.

b) Nennen wir nun die gesamte Abbildung k, $k = h \circ g \circ f$ und somit ist ihre Matrix

$$
\begin{aligned}
M &= M_h \cdot M_g \cdot M_f & (5)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (6)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (7)
\end{aligned}
$$

c) Wir merken, dass wir einfach unser Objekt um mit dem Winkel $\pi/2$ um die z-Achse gedreht haben.

Aufgabe 7: Betrachte die folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Schreiben Sie sie in der Form

$$\dot{P} = AP + b \tag{8}$$

wobei A eine 3×3 Matrix ist, und

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

b) Interpretieren Sie die Form (8) der Differentialgleichung und die Lösung.

c) Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung.

LÖSUNG:

a) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Betrachten wir x, y und z als Funktionen von t, $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$. $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$ sind einfach $\frac{dx}{dt}(t)$, $\frac{dy}{dt}(t)$ und $\frac{dz}{dt}(t)$ (siehe Vorlesung).
Die Lösung beschreibt also die Flugbahn eines Punktes durch die Eigenschaften seiner Geschwindigkeit.

Die Nullen in der letzten Zeile der Matrix A und die Eins im Vektor b bedeuten eine konstante Geschwindigkeit in z-Richtung. Ferner bedeutet die Matrix eine Rotation um den Ursprung mit dem Winkel $\pi/2$ in der (x, y)-Ebene.

Das heißt, betrachtet man die Projektion der Geschwindigkeit auf die (x, y)-Ebene, so läuft die projizierte Flugbahn auf einem Kreis. Die zusätzlich konstante Geschwindigkeit in z-Richtung besagt, dass es sich insgesamt um eine Schraubenlinie handelt.

c) Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\begin{pmatrix} x & = & r\cos(t+C) \\ y & = & r\sin(t+C) \\ z & = & t \end{pmatrix}$$