Aufgabe 13: Orthonormalisieren Sie im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren:

$$a_1 = (1,1,0,0)^T, \quad a_2 = (1,0,1,0)^T \quad a_3 = (0,0,1,0)^T$$

Ergänzen Sie zu einer Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^4$.

LÖSUNG:Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren:

- $v_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)^T$
- $\tilde{v}_2 = a_2 - (a_2.v_1)v_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)^T$
  $v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)^T$
- $\tilde{v}_3 = a_3 - (a_3.v_2)v_2 - (a_3.v_1)v_1 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)^T$
  $v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)^T$

Sei $v_4 = (0,0,0,1)^T$, denn

$$\|v_4\| = 1, \quad v_1.v_4 = v_2.v_4 = v_3.v_4 = 0$$

und v_1, v_2, v_3, v_4 ist eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 14: Orthonormalisieren Sie die Polynome

$$p_0 : t \mapsto 1 \quad p_1 : t \mapsto t \quad p_2 : t \mapsto t^2$$

bezüglich des Skalarprodukte $g(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ auf den Interval $[0,1]$.

LÖSUNG:Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren:

- $\|p_0\| = 1 \Rightarrow q_0(t) = \frac{p_0(t)}{\|p_0\|} = 1$
- $g(p_1, q_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \tilde{q}_1(t) = p_1(t) - g(p_1, q_0)q_0(t) = t - \frac{1}{2}$
  $\|\tilde{q}_1\| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow q_1(t) = \frac{\tilde{q}_1(t)}{\|\tilde{q}_1\|} = \sqrt{3}(2t-1)$
- $g(p_2, q_0) = \frac{1}{3}$ und $g(p_2, q_1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, denn

$$\tilde{q}_2(t) = p_2(t) - g(p_2, q_0)q_0(t) - g(p_2, q_1)q_1(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

$\|\tilde{q}_2\| = \frac{1}{6\sqrt{5}} \Rightarrow q_2(t) = \frac{\tilde{q}_2(t)}{\|\tilde{q}_2\|} = 6\sqrt{5}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$