Aufgabe 15: Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch?

a) Die Funktion $f_1(x, y) = x^2 + y^3$ besitzt im Punkt $(0, 0)$ einen kritischen Punkt. ja ☐ nein ☐

b) Die Funktion $f_1(x, y) = x^2 + y^3$ hat im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Extremum. ja ☐ nein ☐

c) Die Funktion $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0, 0)$ einen kritischen Punkt. ja ☐ nein ☐

d) Die Funktion $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum. ja ☐ nein ☐

e) Die Funktion $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - y^4$ hat im Punkt $(0, 0)$ ein globales Minimum. ja ☐ nein ☐

Lösung:Die Antworten lauten: a) Ja! b) Nein! c) Ja! d) Ja! e) Nein!
Für a) und b) beachtet man dazu $\operatorname{grad} f_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \end{pmatrix}$, woraus sich ergibt, dass $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von f_1 ist. Wegen $D^2 f_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ und $D^2 f_1(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sieht man, dass $D^2 f_1(0, 0)$ positiv semidefinit ist, aber für diesen Fall gilt kein allgemeines Kriterium. Aber $f_1(0, t) = t^3$ zeigt, dass es sich um einen Sattelpunkt handelt, da t^3 negativ ist für $t < 0$, $= 0$ für $t = 0$ und positiv ist für $t > 0$.
Für c), d) und e) beachtet man $\operatorname{grad} f_2(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y - 4y^3 \end{pmatrix}$, woran man erkennt, dass $(0, 0)$ kritischer Punkt von f_2 ist. Wegen $D^2 f_2(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - 12y^2 \end{pmatrix}$ und $D^2 f_2(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sieht man, dass $D^2 f_2(0, 0)$ positiv definit ist, und demnach ein (lokales) Minimum bei $(0, 0)$ liegt mit dem Wert $f_2(0, 0) = 0$. Aber es gilt auch $f_2(0, \pm 1) = 0$ und $f_2(0, \pm 2) = -12$. Dies zeigt, dass es sich nicht um ein globales Minimum handelt.

Aufgabe 16: Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) := (y^3 - y) \cdot (e^x + e^{-x}) \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie lokale Minima, Maxima und Sattelpunkte von f.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösung:

a) Kritische Punkte von f sind die Nullstellen des Gradienten:

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (y^3-y)(e^x-e^{-x}) \\ (3y^2-1)(e^x+e^{-x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} y(y^2-1)(e^x-e^{-x}) \\ (3y^2-1)(e^x+e^{-x}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow x = 0 \text{ und } y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Die Hessesche Matrix ist

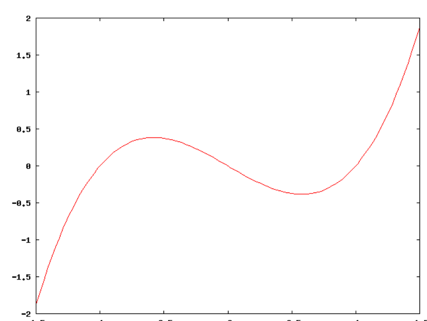
$$
H(x,y) = \begin{pmatrix} (y^3-y)(e^x+e^{-x}) & (3y^2-1)(e^x-e^{-x}) \\ (3y^2-1)(e^x-e^{-x}) & 6y(e^x+e^{-x}) \end{pmatrix}
$$

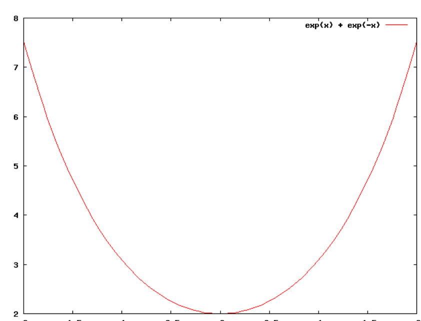
Also

$$
\begin{aligned}
(x,y) = (0, +\frac{1}{\sqrt{3}}) &\Rightarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{12}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
(x,y) = (0, -\frac{1}{\sqrt{3}}) &\Rightarrow H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

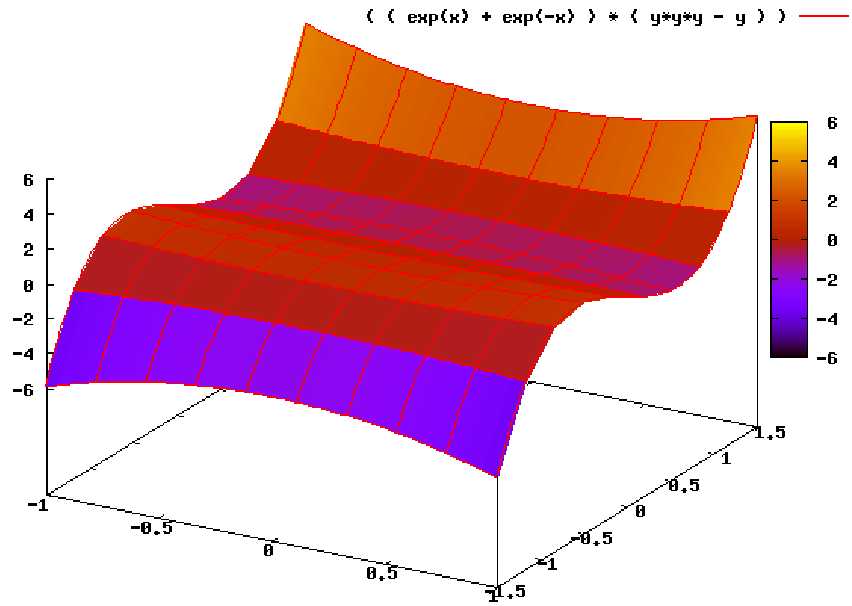
Die Hesse-Matrix ist in beiden Fällen indefinit und beide Punkte $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ sind Sattelpunkte.

b) Wir plotten zunächst die beiden Faktoren von f separat:





und nun den Graphen der gesamten Funktion:



Bemerkung: Für konstantes $y = y_0$ ist $f(x, y_0) = K(e^x + e^{-x})$.