Aufgabe 17: Berechnen Sie den kritischen Punkt x_0 der Funktion

$$f(x) = \exp\left(-\frac{\|x-a\|^2}{2}\right), \quad x, a \in \mathbb{R}^n,$$

und die Hessematrix $D^2 f(x_0)$.

LÖSUNG: $f(x) = \exp\left(-\frac{\|x-a\|^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2\right)$ und dann

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{1\le i\le n} =$$
$$\left(-\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-a_i)^2\right)(x_i - a_i)\right)_{1\le i\le n} = -\exp\left(-\frac{\|x-a\|^2}{2}\right)(x-a)$$

An den kritischen Punkt x_0,

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0 \Rightarrow -\exp\left(-\frac{\|x_0-a\|^2}{2}\right)(x_0 - a) = 0 \Rightarrow x_0 = a\,.$$

Die Hessematrix ist

$$D^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{ij} = \left(\exp\left(-\frac{\|x_0-a\|^2}{2}\right)(x_i-a_i)(x_j-a_j) - \exp\left(-\frac{\|x_0-a\|^2}{2}\right)\delta_{ij}\right)_{ij}$$

wobei $\delta_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ ist. Es folgt

$$D^2 f(x_0) = D^2 f(a) = \left(\exp\left(-\frac{\|a-a\|^2}{2}\right)(a_i-a_i)(a_j-a_j) - \exp\left(-\frac{\|a-a\|^2}{2}\right)\delta_{ij}\right)_{ij}$$
$$= (-\delta_{ij})_{ij} = -I$$

wobei I die Identität ist.

Aufgabe 18: a) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x) = (\|x\|^2 - 1)^2$$

mit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

b) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$g(x) = f(x) + 2\epsilon x_1^2$$

mit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $0 < \epsilon < 1$.

Lösung:

a) $f(x_1, x_2) = (\|x\|^2 - 1)^2 = (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$ und so an einem kritischen Punkt (x_1, x_2):

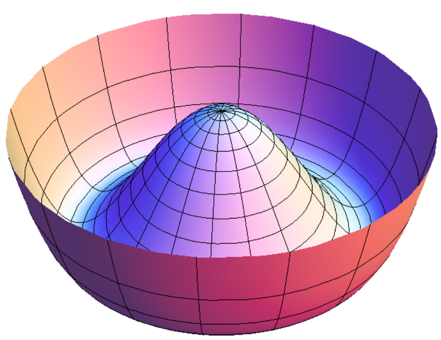
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 4(x_1^2 + x_2^2 - 1)x_1 = 0$$

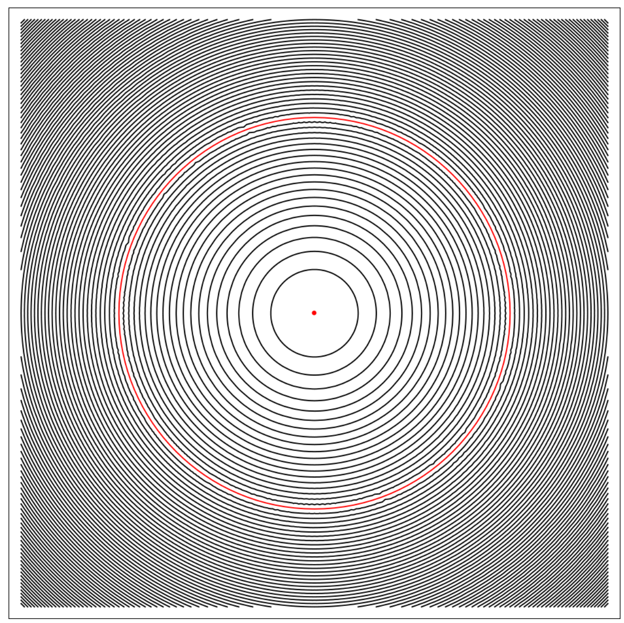
und

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 4(x_1^2 + x_2^2 - 1)x_2 = 0$$

Es folgt

- $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$ liegt auf dem Einheitskreis,
- oder $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$ ist der Ursprung.





b) $g(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + 2\epsilon x_1^2$ und so an einem kritischen Punkt (x_1, x_2):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 4(x_1^2 + x_2^2 - 1 + \epsilon)x_1 = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 4(x_1^2 + x_2^2 - 1)x_2 = 0$$

Es folgt

- $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$ ist der Ursprung,
- oder $x_1^2 + x_2^2 - 1 + \epsilon = 0$ und $x_2 = 0 \Rightarrow, (x_1, x_2) = (\pm\sqrt{1 - \epsilon}, 0)$,
- oder $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ und $x_1 = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, \pm 1)$.