Aufgabe 19: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x + b \cdot x + c$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ sowie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x_0 + t\xi)$$

mit x_0, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = 2$, $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $g'(t)$ und $g''(t)$.

b) Zeigen Sie für beliebige A, b, c, x_0 und ξ

$$g'(t) = A\,(x_0 + t\xi) \cdot \xi + b \cdot \xi.$$

Tipp: $g = f \circ h$ mit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $h(t) = x_0 + t\xi$.
Verwenden Sie die Kettenregel im $\mathbb{R}^n$.

c) Zeigen Sie für beliebige A, b, c, x_0 und ξ:

$$g''(t) = A\xi \cdot \xi.$$

Tipp: Erinnern Sie sich an die Regel zum Ableiten von Skalarprodukten.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + x_1 + x_2 + 2 \\ &= \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 + 2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g(t) &= f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} 2+t \\ 3+t \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2}(2+t)^2 + (3+t)^2 + 2 + t + 3 + t + 2 \\
&= \frac{1}{2}\left(4 + 4t + t^2\right) + 9 + 6t + t^2 + 7 + 2t \\
&= 2 + 2t + \frac{1}{2}t^2 + 16 + 8t + t^2 \\
&= \frac{3}{2}t^2 + 10t + 18
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= 3t + 10 \\
g''(t) &= 3
\end{aligned}
$$

b) $g(t) = f \circ h$ mit $h(t) = x_0 + t\xi$.

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= Df\left(h(t)\right) Dh(t) \\
&= \nabla f\left(h(t)\right) h'(t) \\
&= \left(A\left(x_0 + t\xi\right) + b\right)^T \xi \\
&= A\left(x_0 + t\xi\right) \cdot \xi + b \cdot \xi
\end{aligned}
$$

c) Die Regel zum Ableiten von Skalarprodukten sieht wie folgt aus

$$\frac{d}{dt}\left(v(t) \cdot w(t)\right) = \dot{v}(t) \cdot w(t) + v(t) \cdot \dot{w}(t).$$

Zudem läßt sich komponentenweise nachrechen, dass für konstante Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und Vektoren $v(t) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{d}{dt}\left(Av(t)\right) = A\dot{v}(t).$$

Mit diesem Wissen läßt sich nun auch die zweite Ableitung der Funktion g berechnen:

$$
\begin{aligned}
g''(t) &= \frac{d}{dt} g'(t) \\
&= \frac{d}{dt}\left(A\left(x_0 + t\xi\right) \cdot \xi + b \cdot \xi\right) \\
&= A\xi \cdot \xi
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \cos(x + y).$$

Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion f im Punkt $(0, 0)$ mit Restglied der Ordnung 4.

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x_0+\xi, y_0+\zeta) = f(x_0,y_0) &+ \partial_x f(x_0,y_0)\xi + \partial_y f(x_0,y_0)\zeta \\ &+ \partial_y\partial_x f(x_0,y_0)\xi\zeta + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(x_0,y_0)\xi^2 + \frac{1}{2}\partial_y^2 f(x_0,y_0)\zeta^2 \\ &+ \frac{1}{2}\partial_y^2\partial_x f(x_0,y_0)\xi\zeta^2 + \frac{1}{2}\partial_y\partial_x^2 f(x_0,y_0)\xi^2\zeta + \frac{1}{6}\partial_x^3 f(x_0,y_0)\xi^3 + \frac{1}{6}\partial_y^3 f(x_0,y_0)\zeta^3 \\ &+ O\left(\left\|\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}\right\|^4\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= -\sin(x+y) = \partial_y f(x,y) \\ \partial_x^2 f(x,y) &= -\cos(x+y) = \partial_y^2 f(x,y) = \partial_y\partial_x f(x,y) \\ \partial_x^3 f(x,y) &= \sin(x+y) = \partial_y^3 f(x,y) = \partial_y\partial_x^2 f(x,y) = \partial_x\partial_y^2 f(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\xi,\zeta) &= 1 - \xi\zeta - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\zeta^2 + O\left(\left\|\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}\right\|^4\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix} + O\left(\left\|\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}\right\|^4\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 21: Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x,y) = x^3 - 7xy + 2x^2y$$

im Punkt $(1,1)$ mit Restglied der Ordnung 4. Überprüfen Sie durch Ausmultiplikation, ob die Taylorentwicklung gleich der Funktion ist.

Lösung:

$$\begin{aligned} &f(1,1) = -4 \\ &f_x(x,y) = 3x^2 - 7y + 4xy \Rightarrow f_x(1,1) = 0 \\ &f_y(x,y) = -7x + 2x^2 \Rightarrow f_y(1,1) = -5 \\ &f_{xx}(x,y) = 6x + 4y \Rightarrow f_{xx}(1,1) = 10 \\ &f_{xy}(x,y) = -7 + 4x \Rightarrow f_{xy}(1,1) = -3 \\ &f_{yy}(x,y) = 0 \\ &f_{xxx}(x,y) = 6 \\ &f_{xxy}(x,y) = 4 \\ &f_{xyy}(x,y) = f_{yyy}(x,y) = 0 \end{aligned}$$

und dann

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2f_{xy}(x-1)(y-1) + f_{yy}(1,1)(y-1)^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(f_{xxx}(1,1)(x-1)^3 + 3f_{xxy}(x-1)^2(y-1) + 3f_{xyy}(x-1)(y-1)^2 + f_{yyy}(1,1)(y-1)^3\right) \\
&\quad + \mathrm{O}((x-1)^4 + (y-1)^4) \\
&= -4-5(y-1)+5(x-1)^2-3(x-1)(y-1)+(x-1)^3+2(x-1)^2(y-1)+\mathrm{O}((x-1)^4+(y-1)^4)
\end{aligned}
$$

Ausmultiplikation:

$$
\begin{aligned}
& -4 - 5(y-1) + 5(x-1)^2 - 3(x-1)(y-1) + (x-1)^3 + 2(x-1)^2(y-1) \\
&= -4-(5y-5)+(5x^2-10x+5)-(3xy-3x-3y+3)+(x^3-3x^2+3x-1)+(2x^2y-4xy-2x^2+4x+2y-2) \\
&= x^3 - 7xy + 2x^2y = f(x,y)
\end{aligned}
$$